丁善瑞 编著

实分析基础

浙江大学出版社

实分析基础

丁善瑞　编著

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科院校学生学习高等数学以后，希望学习现代数学的读者提供必要的分析基础而编写的。全书共六章一个附录：包括集合与映射，实数的构造以及有关实数的重要定理，级数，度量空间，微分和可微映射，R^n的积分，Lebesgue积分（附录）。

本书对想要涉足现代数学的读者提供了分析的基本理论、思想和方法。内容深入浅串，说理清楚。

本书可作为工科大学生、研究生的教材或数学参考书，对数学专业的学生也有一定的参考价值。

实分析基础

丁善瑞 编著

责任编辑 贾吉柱

浙江大学出版社出版

浙江上虞印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

850×1168 32开本 12.625印张 305千字

1990年11月第1版 1990年11月第1次印刷

印数0001—1500

ISBN 7-308-00408-2/O·081 定价：3.20元

前　言

目前我国高校数学课的设置不外乎两类，一类是高等数学，一类是工程数学。后者多强调于方法与应用，而真正能反映学生数学基础与数学素养的是高等数学。但由于近代科学的迅速发展，各种领域互相交叉渗透，研究的问题越来越广泛与复杂，许多现代数学的思想、方法和内容无时无刻不在影响其它学科的发展。这就使广大从事研究工作的科技人员、研究生和大学生普遍感到传统的工科院校高等数学内容远远不能满足要求，他们想涉足现代数学而又感到基础不足，所以迫切希望在高等数学和现代数学之间能搭起一座知识的桥梁，以便引导他们能较为方便地接近现代数学的前沿。正是出于这个考虑，作者于1983年开始在浙江大学为工科高年级大学生和研究生开设了“实分析基础”，试图通过这门课程的讲授，能使工科大学生、研究生在数学的素质方面有所提高，并为他们进一步学习现代数学打下一个必要的分析基础。实践证明，这是一件非常有意义的工作，而且这个目的基本上是达到了。

在高等数学与现代数学之间究竟要补充何种知识才能最“省时省科”地填平两者之间鸿沟，这是一个值得探讨的问题。作者对此经验不多，所编“实分析基础”实为闭门之车，尚有待不断试验、改进、充实与提高。

本书插图由张礼明同志精心绘制，作者在此表示感谢。

目录中打有“≐”号的内容，初学者可以不读。

囿于作者水平，书中缺点、错误在所难免，望校内外专家和读者不吝指正。

作者

1990年4月

目　录

第一章　集合与映射

§ 1　集合……………………………………………1

1.1　集合的概念……………………………………1

1.2　集合的基本运算………………………………2

1.3　集的积…………………………………………4

1.4　上(下)界，最大(小)元，上(下)确界……5

§ 2　映射……………………………………………7

2.1　映射的概念……………………………………7

2.2　映射的例子……………………………………9

2.3　映射的复合……………………………………13

2.4　单射、满射、双射……………………………15

2.5　逆映射…………………………………………15

2.6　直接象与原象…………………………………18

§ 3　等价关系………………………………………19

3.1　二元关系………………………………………19

3.2　等价关系………………………………………20

3.3　等价类…………………………………………22

3.4　商集……………………………………………23

3.5　序关系…………………………………………24

§ 4　同构……………………………………………25

§ 5　可数集与不可数集……………………………28

5.1 集的势……………………………28
5.2 可数集与不可数集……………………28
5.3 区间〔0，1〕的不可数性……………30
§6 量词及例……………………………31
6.1 量词……………………………31
6.2 例……………………………31
习题……………………………33

第二章 实数的构造以及有关实数的定理

*§1 实数的构造……………………………37
1.1 建立实数理论的必要性……………………37
1.2 Cauchy序列和等价的Cauchy序列……38
1.3 实数的加法……………………………40
1.4 实数的乘法……………………………42
1.5 实数域是有理数域的扩张……………46
1.6 实数的比较……………………………46
§2 有关实数的定理……………………………48
2.1 Q在R内的稠密性……………………48
2.2 Cauchy收敛准则……………………49
2.3 确界定理……………………………51
2.4 有关单调数列的一个定理……………54
2.5 Bolzano—weierstrass定理……………55
2.6 闭区间套定理……………………………56
2.7 有限覆盖定理……………………………57
2.8 有关实数定理的相互推证举例…………60
§3 闭区间上连续函数的性质……………62

3.1 有界性与最大（小）值定理………………62
3.2 介值定理………………64
3.3 Cantor一致连续定理………………65
3.4 有关反函数的一个定理………………66
§4 上、下极限………………69
4.1 上、下极限的概念与定义………………69
4.2 上、下极限的性质………………70
习题………………73

第三章 级 数

§1 常数项级数………………77
1.1 基本概念………………77
1.2 Cauchy收敛准则………………78
§2 正项级数………………80
2.1 正项级数的比较判别法………………80
2.2 Cauchy判别法和D'Alembert判别法………………82
§3 任意项级数………………86
3.1 级数的绝对收敛与条件收敛………………86
3.2 Abel变换………………88
3.3 Dirichlet判别法与Abel判别法………………90
§4 绝对收敛级数的性质………………92
4.1 绝对收敛级数关于项的可交换性………………92
4.2 级数的乘法………………97
§5 函数序列及其一致收敛性………………105
5.1 点态收敛与一致收敛………………105
5.2 与一致收敛定义等价的其它条件………………108

5.3 一致收敛与连续性……………………………111
5.4 一致收敛序列的积分……………………………112
5.5 一致收敛序列的微分……………………………113
§6 函数项级数及其一致收敛性……………………114
6.1 函数项级数及其收敛的定义……………………114
6.2 一致收敛级数的性质……………………………114
6.3 函数项级数的一致收敛判别法…………………116
§7 幂级数……………………………………………122
7.1 Abel定理与幂级数的收敛半径…………………122
7.2 Abel定理的应用…………………………………124
7.3 幂级数的逐项微分与逐项积分…………………127
习题 ……………………………………………………129

第四章 度量空间

§1 Euclid空间……………………………………………134
1.1 n维Euclid空间……………………………………134
1.2 范数及其性质…………………………………………136
1.3 Hölder不等式和Минковский
不等式……………………………………………………137
§2 度量空间………………………………………………141
2.1 距离和度量空间………………………………………141
2.2 度量空间的其它例子…………………………………143
2.3 序列的收敛……………………………………………145
2.4 开集和闭集……………………………………………148
2.5 紧集……………………………………………………153
§3 连续映射………………………………………………158

3.1 连续映射及其性质……………………………158
3.2 一致连续……………………………………161
3.3 压缩映射及其应用……………………………163
§ 4 Weierstrass逼近定理…………………………171
4.1 Стеклов函数…………………………………171
4.2 Стеклов函数的卷积表示………………………173
4.3 Weiersrass逼近定理……………………………174
4.4 Bernstein多项式…………………………………177
习题……………………………………………………182

第五章 微分和可微映射

§ 1 预备知识…………………………………………187
1.1 向量值函数…………………………………………187
1.2 线性变换及其矩阵…………………………………187
1.3 线性变换的复合……………………………………189
1.4 空间$L(R^n, R^m)$…………………………………190
§ 2 方向导数与偏导数…………………………………192
2.1 方向导数……………………………………………192
2.2 偏导数………………………………………………192
2.3 方向导数、偏导数存在与函数连续之关系………………………………………………193
§ 3 微分…………………………………………………194
3.1 微分的定义…………………………………………194
3.2 可微性与连续性以及与方向导数存在性之间的关系………………………………197
3.3 $DF(X)$的矩阵（Jacobian矩阵）……200

3.4 链法则……………………202
3.5 C^1类映射……………………208
§4 隐函数存在定理及其应用……………………210
4.1 由一个方程确定的隐函数存在定理……………………212
4.2 由方程组确定的隐函数存在定理……………………218
4.3 反函数存在定理……………………229
*4.4 条件极值……………………230
习题……………………239

第六章 R^n内的积分

§1 R^1内的Riemann积分……………………246
1.1 [a, b]的分划……………………246
1.2 Riemann积分……………………247
1.3 Darboux积分……………………249
1.4 Darboux可积的充要条件……………………252
1.5 Darboux可积与Riemann可积的关系……………………256
1.6 积分的基本性质……………………258
§2 R^n内的容积……………………266
2.1 n维区间的容积……………………266
2.2 有界点集的容积……………………269
§3 R^n内积分……………………273
3.1 分划……………………273
3.2 R^n内的Riemann积分……………………274
3.3 R^n内的Darboux积分……………………276
3.4 Darboux可积的充要条件……………………278

3.5 D－可积与R－可积的关系……………278
§4 重积分的计算……………………………283
4.1 化积分为累次积分……………………283
4.2 重积分的变量替换……………………288
§5 微分形式与外微分……………………307
5.1 坐标变换与空间的定向………………307
5.2 一次微分形式及其积分………………310
5.3 二次微分形式及其积分………………313
5.4 三次微分形式及其积分………………321
5.5 推广……………………………………323
5.6 外微分…………………………………325
5.7 Stokes公式……………………………327
习题……………………………………………330
附录 Lebesgue积分…………………………335
§1 零测度集………………………………336
§2 简单函数及其积分……………………337
§3 简单函数的单调序列…………………338
§4 C_1类函数及其积分…………………343
§5 一般区间Ⅰ上的Lebesgue积分及
其性质……………………………………349
§6 Levi单调收敛定理……………………354
§7 Lebesgue控制收敛定理与Fatou定理……359
§8 可测函数与可测集……………………364
§9 平方可积函数类L^2(Ⅰ)…………370
习题……………………………………………376

第一章　集合与映射

§1　集　　合

1.1　集合的概念

集合是数学中常用的概念。例如，实数的集合，自然数的集合，多项式的集合，连续函数的集合，平面点的集合，空间平面的集合，等等。

集合的概念在现代数学中扮演着极其重要的角色。但这个概念是如此基本，以致我们在这里没有必要也无法对它下一个精确的定义，而只能用事物的“总体”，“全体”等等词汇对它作一番解释。当然，这种解释在概念上仍然是很模糊的。要弥补这个缺陷，一般可以采用“公理集合论”。但它已超出本教程的范围。

集合也简称为集。

组成集合的“个体”或“成员”叫做元素。为了表示元素x是属于集合E的，我们采用记号

$$x \in E \text{ 或 } E \ni x$$

若x不属于E，则记作$x \notin E$

通常用两种方法来表示集合：

1°　将属于此集的元素都列举出来。例如

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10, \}$$

$N=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$

$B=\{$甲，乙，丙，丁$\}$

2° 给出集合的一切元素所满足的从属法则。这个法则一般由一个或多个条件组成。例如：

$A=\{x: x\in N$且$x\leqslant 10\}$

$D=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$

$C=\{y: y^2-16=0\}$

定义 如果组成集合A的元素也都是集B的元素，则称集A是集B的一个子集或部分。记为

$A\subseteq B$

并读作"A包含在B中"或"B包含A"（见图1）

从定义可知，每一个集合本身也是它自己的一个子集。因此上述包含关系$A\subseteq B$并没有排斥$A=B$的情况。当$A\subseteq B$并且存在元素$x\in B$而$x\notin A$时，称A为B的**真子集**，记为$A\subset B$。不含任何元素的集合叫做**空集**，记为$\{\ \}$或$\varnothing$。每一个集合M都以空集为其子集。事实上，由定义可知，$A\subseteq B$当且仅当凡不属于B的元素必也不属于A。因此，如果$x\notin M$，显然亦有$x\notin\varnothing$。所以$\varnothing\subseteq M$。

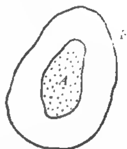

图 1

例1 菱形的全体是四边形集的一个子集。

例2 多项式全体P是连续函数全体C的一个子集。

例3 集$A=\{(x, y): x^2+y^2=-3, x\in\mathrm{R}, y\in\mathrm{R}\}$是空集。

1.2 集合的基本运算

A.并集：设A、B为两集。若集C是由所有属于A或者属于B的元素组成，则称C是A、B两集之并（见图2），记作

$$C=A\cup B$$

例4　菱形集L与矩形集R之并是至少有两个对称轴的四边形集。

例5　设A是24的因子集，B是36的因子集，则

$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$

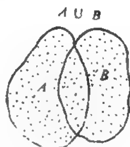

图　2

由此可知

$$A\cup B=\{x:\ x\in A\text{或}x\in B\}\qquad(1)$$

我们同样可以定义$A\cup B\cup C$，等等。

B.交集：若集C是由所有既属于A又属于B的元素组成，则称C是A、B的交（见图3），记为

$$C=A\cap B$$

例6　在四边形集中，菱形子集L与矩形子集R之交是正方形集。

例7　24的因子集A与36的因子集B之交是集

$C=A\cap B=\{1,2,3,4,6,12\}=\{x:\ x\text{是12的因子}\}$

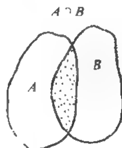

图　3

由此可知，

$$A\cap B=\{x:\ x\in A\text{且}x\in B\}\qquad(2)$$

我们同样可以定义$A\cap B\cap C$，等等。

C.差集：设A、B为任意两集。所有属于A而不属于B

的元素所成之集，称为A与B之差（见图4）。记为$A\backslash B$。于是有

$$A\backslash B=\{x:\ x\in A\text{且}x\notin B\} \quad (3)$$

D.补集：设A是E的一个子集。称集$E\backslash A$为A关于E的补集（或余集）（见图5），并记为$C_E A$，其中，E是某个基本集。当基本集不讲自明时，也可以把$C_E A$简单地记为CA或A^c。

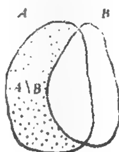

图 4

定理1 设A、B为两集，则有

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c \quad (4)$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c \quad (5)$$

其中补集都是关于某个基本集E而言的。

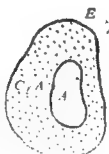

图 5

证明 我们证明第一个等式而把第二个等式的证明留给读者。

设$x\in(A\cup B)^c$。于是$x\in E\backslash(A\cup B)$，从而$x\notin A$，$x\notin B$。故$x\in E\backslash A=A^c$，$x\in E\backslash B=B^c$，即$x\in A^c\cap B^c$。所以有

$$(A\cap B)^c\subseteq A^c\cap B^c \quad (*)$$

反过来，若$x\in A^c\cap B^c$，则$x\in A^c$且$x\in B^c$，$x\notin A$，$x\notin B$，从而$x\in E\backslash(A\cup B)=(A\cup B)^c$。故

$$(A\cup B)^c\supseteq A^c\cap B^c \quad (**)$$

由（*）与（**）便得公式（4）

1.3 集的积

设x，y为两事物。称事物的序列$(x,\ y)$为偶，其中x称为偶的第一元素，y称为偶的第二元素。偶与元素

的次序有关，它并不等于含两个元素x，y的子集$\{x,y\}$。一般而言，$(x, y) \neq (y, x)$。

设X，Y为两集。由一切取自X的元素x与取自Y的元素y所成偶(x, y)的集合称为集X和Y的积集，并记为$X \times Y$。因此有

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

例 8　我们可以定义R×R。这个集由所有两个元素都是实数的偶组成。为了使这个概念显得更直观，我们可以把R×R中的每一个元素(x, y)与平面P内关于坐标系有横标x和纵标y的点相对应。于是R×R便与P等同。同样的理由，R×R的子集$[a, b] \times [c, d]$便与平P面内顶点为(a, c)，(a, d)，(b, c)，(b, d)的闭矩形点集等同（见图 6）

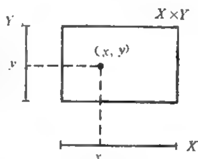

图　6

我们可以毫无困难地定义n个集X_1，X_2，…，X_n的积$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$。特别，若$X_1 = X_2 = \cdots = X_n$，便将集$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$记为$X^n$。例如　$R \times R = R^2$，$R \times R \times \cdots \times R = R^n$，等等。通常还把$X^m \times X^n$与$X^{m+n}$视为等同。

1.4　上（下）界，最大（小）元，上（下）确界

以下都假定X是R的一个子集，a是R的一个元素。

A.上（下）界：如果对X中的每一个元素x，恒有$a \geqslant x$成立，则称a是X的一个**上界**；如果对X中的每一个元素X，恒有$a \leqslant x$成立，则称a是x的一个**下界**。

例 9　R的子集$X = [0, +\infty)$没有上界，而所有

不大于零的数a都是它的下界。

如果集X存在上界，则说X**囿于上或上有界**；如果集X存在下界，则说X**囿于下或下有界**。X既囿于上又囿于下，则说X**有界**。

B.最大（小）元：假设$a \in X$，并且是X的一个上(下)界，便称a是X的**最大（小）元**。记作$a = \max X$（相应地，记最小元a为$\min X$）。

我们知道，R的每一个有限子集都有最大元和最小元。但对于无限集就不一定有此性质了。例如集$\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots\}$没有最小元；集$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$以及集$[0, 1)$都没有最大元。

但是，如果一个集有最大（小）元，那么它一定是唯一的。事实上，假设x和x'都是X的最大元，按定义，它们都属于X，同时又都是X的上界。故有

$$x' \geqslant x \quad 且 \quad x \geqslant x'$$

因而$x' = x$。对于最小元的情况也一样可证。

显然，有限集的最大元一定也是此集的最小上界；其最小元一定也是此集的最大下界。但是，对于一个无限集来说，最小上界存在而最大元不存在，或者最大下界存在而最小元不存在却是经常发生的。例如，集$X = [0, 1)$就没有最大元，尽管它以1为最小上界。因此，我们还有必要引入最小上界与最大下界这两个非常重要的概念。

C.上（下）确界：如果a是X的最小上界，便称a是X的**上确界**；如果b是x的最大下界，便称b是x的**下确界**。X的上、下确界分别记为

$$a = \sup X \quad 与 \quad b = \inf X$$

如同证明最大、最小元的唯一性一样，可以证明上、下

确界如果存在也是唯一的。

从上述定义看出，如果a是X的最大（小）元，那么它便是X的上（下）确界；如果a是X的上（下）确界，那么它便是X的一个上(下)界。但反过来的关系均不一定成立。

为使X有上（下）确界，它必须囿于上（下）。以后我们会看到，**R**的任何一个非空囿于上的子集都有上确界；**R**的任何一个非空囿于下的子集都有下确界。这个性质是极限论的基础性质。我们将在第二章利用实数的理论对它作出严格的证明。

定理 2　为使a是X的上确界，必需而且只需下列两个条件成立：

1°　对每一个$x\in X$，恒有$x\leqslant a$成立；

2°　对不论怎样的b，只要$b<a$，恒存在$x\in X$使$x>b$。

证明　1°是a为X的上界之充分必要条件，而2°是说，凡小于a的数b都不能成为X的上界，反之亦然。因而条件1°，2°便是a为最小上界，即上确界的充分必要条件。

对于下确界也有类似的定理。

当X不囿于上时，我们约定$+\infty$为其上确界；当X不囿于下时，我们约定$-\infty$为其下确界。这样约定之后，**R**的任何一个非空子集便都有有限或无限的上、下确界了。

§2　映　射

2.1　映射的概念

定义　设X、Y为两集。如果X的每一个元素x，按照法则f都与Y内唯一确定的元素y对应，则称这个法则为X到Y内的一个映射。记作

$$f: X \longrightarrow Y$$

或

$$f: x \longmapsto y$$

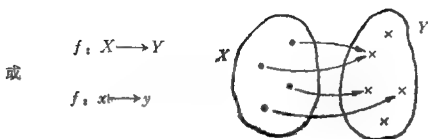

图 7

例1 设教室内学生的集合为M，椅子的集合为N。每个学生都和坐着的椅子相对应。这个对应（坐法）确定了M到N内的一个映射。

上例中不同的坐法确定不同的映射。这里不要求椅子数要和学生数一样多，也不要求每张椅子都有学生坐着，还允许几个人同坐一张椅子（这样做并没有违背映射的定义，见图7）。但不允许一个学生对应（坐）多于一张椅子。因为我们所讨论的是单值对应。

例2 设$N=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，$B=\{$甲，乙$\}$，对应关系$f$：

$0, 2, 4, 6, \cdots, \longmapsto$ 甲

$1, 3, 5, 7, \cdots, \longmapsto$ 乙

这是N到B内的一个映射。此时N中有无穷多个元素都与B中同一个元素对应，但没有违反N中每一个元素在B中都有唯一确定的元素与之对应的原则。

设f是一个映射。通常称$y=f(x)$为x在f下的象；称x为y在f下的一个原象（注意，对于$y\in Y$，它在f下未必有原象，即使有，也未必是唯一的，见例1）；称X为f的定义集。$f(x)$的全体记为$f(X)$，即$f(X)=\{f(x): x\in X\}$。一般而言，有$f(X)\subseteq Y$。

当X，Y都是$\mathbb{R}$的子集时，映射便成为我们熟知的实函数。故通常也把“函数”作为“映射”的同义语。

映射的图形：设f是X到Y内的映射。称集

$$G=\{(x, f(x)): x\in X\}$$

为映射f的图形。显然，它是$X\times Y$的一个子集（部分），并且具有下列两个性质：

i） 对每一个$x\in X$，存在$y\in Y$，使$(x,y)\in G$；

ii） 若对某个$x\in X$同时使(x,y_1)和(x, y_2)属于G，则有$y_1=y_2$。

反过来，如果$X\times Y$的一个子集G具备上述两条性质，那么对每一个$(x, y)\in G$，可以定义对应关系

$$f: x\longrightarrow y$$

这就是X到Y内的一个映射。因此我们完全有理由把映射与它的图形看成同一回事，并且以此作为映射的另一定义。

定义 称积集$X\times Y$的一个部分A为X到Y内的映射。这里A为由这样的序偶所成：X的每一个元素必在A中的一个而且仅在一个序偶中作为第一个元素出现。

这个定义虽不及映射的第一定义那样直观，但至少它使我们避免了原定义中关于“法则”这个多少有点模糊的概念。

2.2 映射的例子

i） 设X、Y都是实（复）数子集。通常的实（复）值函数可以由代数规则或者由“超越”方法给出。例如

$$x\longrightarrow 3x^2+x$$

$$x\longrightarrow \sin x$$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$$

等等。甚至还可以由不能写成表达式的形式给出。例如著名的Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

显然这种表示法已把x与变量$D(x)$之间的对应完全确定。所以和前面几种熟知的映射表示法是一样完美无缺的。

ii） 螺旋线的参数表示是

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \\ z=ct \end{cases}$$

它可以看成是$[0, 2\pi)$到R^3内的一个映射：

$$F: t \longrightarrow (x, y, z)$$

这种映射称为实变量的向量值函数（见图8）。

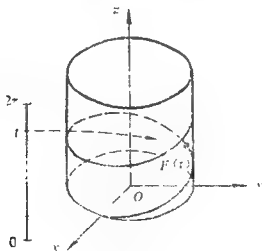

图 8

iii） 球面坐标变换

$$\begin{cases} x=r\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ y=r\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ z=r\ \cos\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 0\leqslant\theta\leqslant\pi \\ 0\leqslant\varphi<2\pi \end{array}\right)$$

可以看成是 θ—O—φ 平面上的矩形域$[0, \pi]\times[0, 2\pi)$到R^3内的映射

$$F_2\ (\theta,\ \varphi)\longrightarrow(x,\ y,\ z)$$

它把上述矩形域上的点（θ，φ）一对一地映射到R^3内一个以r为半径，中心在原点的球面上。

iv） 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

是一个已知的$m\times n$矩阵。记R^n的点X为

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 R^m的点Y为

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

则

$$T_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是R^n到R^m内的一个映射。记成

$$Y=T(X)$$

V) 更一般地，设D是R^n的一个子集，$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$D$的任意一点。假设按照某个确定的法则F，使它与$R^m$内某一点$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$相对应。这个对应法则确定了$D$到$R^m$内的一个映射$Y=F(X)$，称为$D$到$R^m$内的向量值函数。所以一元实函数，多元实函数以及ii)，iii)，iv)的函数都可以看成是向量值函数的特殊情况。

因为$y_1, y_2, \cdots, y_m$都是与$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$有关的实数，所以每一个$y_i$都可以看成是D到$R^1$的函数。于是总可以表示成

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \qquad (A)$$

对应法则(A)与对应法则$Y=F(X)$是等价的。然而后者在书写上却要简洁得多。

向量值函数在本教程中占有很重要的地位。

vi) 记$[a, b]$上的连续函数全体为$C_{[a,b]}$。设$f(x)$为$[a,b]$上的任意一个元素，而$g(x)$为$C_{[a,b]}$的一个已知元素，则

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

与

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$$

都确定了$C_{[a,b]}$到R内的一个映射或泛函数（抽象集合M到实数集R内的映射通常称为泛函数）。

vii） 设$K(s,t)$是正方形$0\leqslant s,t\leqslant 1$上的一个已知连续函数。若$x(t)\in C_{[0,1]}$，则

$$x\longmapsto\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

是$C_{[0,1]}$到$C_{[0,1]}$内的一个映射或算子（抽象集合到抽象集合内的映射通常称为算子）。

2.3 映射的复合

设有两个映射

$$f:X\longrightarrow Y\text{和}\quad g:Y\longrightarrow Z$$

下面我们定义一个X到Z内的映射，它由f与g结合而成。设x为X的任意一个元素，y是x在f下的象，所以$y\in Y$。由法则g，y又Z与内某个元素z对应。故

$$z=g(y)=g(f(x))=t(x)$$

定义映射

$$t:x\longmapsto z$$

称此X到Z内的映射为f与g的复合（先f后g），记为$g\circ f$。故有

$$\underset{\longleftarrow\!\!\!\longrightarrow}{x\overset{f}{\longmapsto}y\overset{g}{\longmapsto}z}$$

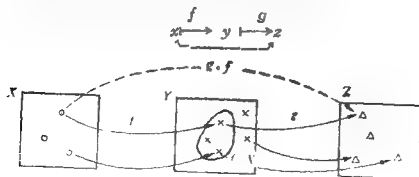

图 9

例、设P为平面点的全体，D_1与D_2是平面上的两条相交直线。对每一个$S\in P$，存在着经过S且与D_1平行的一条直线D与之对应：

$$f: S\longmapsto D$$

f是一个映射，其定义集是平面点的全体P，而$f(P)$由一切与D_1平行的直线（即P的某种子集）所组成。

属于$f(P)$的直线必与D_2相交。令

$$g: D\longmapsto S'=D\cap D_2$$

g便是与D_1平行的直线集$f(P)$到D_2内的映射。$g\circ f$便是P到D_2内的映射，其几何意义是：对每一个$S\in P$，按D_1方向作它在D_2上的投影（见图10），这个投影便是S在$g\circ f$下的象。

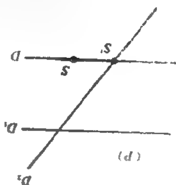

图 10

复合映射的概念可作如下推广。设

$$f_1: X_1\longrightarrow X_2$$
$$f_2: X_2\longrightarrow X_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_n: X_n\longrightarrow X_{n+1}$$

均为映射，则可以定义复合映射

$$f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1: X_1\longrightarrow X_{n+1}$$

一般而言，$f\circ g\neq g\circ f$，但有$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$。

设f是X到其自身内的一个映射。我们分别把$f\circ f$，$f\circ f\circ f$，……记为f^2，f^3，……。

2.4 单射、满射、双射

设f是X到Y内的映射。

1° 如果X的两个不同元素，在Y内恒有不同的象，则称f是单（内）射。此即说，

$$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

记号"$\Longrightarrow$"表示"蕴涵"，即如果左边的断言成立必导致右边的断言成立。

如果仍以例1中学生集M和椅子集N的对应f为例，那么假设f是单射，就意味着不能有两个或两个以上的学生同坐一张椅子。所以对单射来说，$f(X)$的每一个元素都只有唯一的原象。

2° 如果Y的每一个元素都是X内至少一个元素在f下的象，则称此种映射为满（全）射。此时亦称f是X到Y上的映射。

当例1的映射是满射时，意味着每张椅子上都至少有一个学生坐着。所以对满射来说，必有$f(X)=Y$。

3° 如果f既是单射又是满射，则称f是双射（或全单射）。

对双射来说，X的每一个元素x都有唯一的$y\in Y$与之对应；反之，对于每一个$y\in Y$，在X内亦有而且只有一个原象。所以X与Y内的元素之间的对应关系是双方一对一的关系。

图11表示四种映射的对应关系是。

一个X到X的双射叫做X的一个**置换**。例如平面上点的平移、旋转，位似等变换都是平面的一种置换。

2.5 逆映射

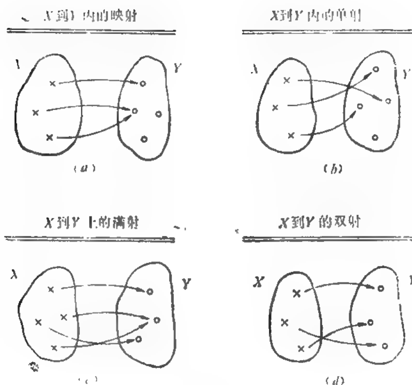

图 11

假设f：$X\longrightarrow Y$是双射，y是Y的任意一个元素。由于f是满射，所以在X内至少存在一个元素x满足$y=f(x)$；又由于f是单射，所以这个元素是唯一的。于是每一个$y\in Y$都有唯一确定的$x\in X$与之对应并使$y=f(x)$。这个对应关系构成了Y到X上的一个映射，称为f的逆映射并记为f^{-1}或$x=f^{-1}(y)$。显然，

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x))=x \\ f(f^{-1}(y))=y \end{cases} \qquad (1)$$

我们称X到其自身内的映射

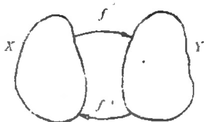

图 12

$$x \longmapsto x$$

为X的一个恒等映射（或恒等变换），并记为id_X。故当f为双射时由（1）便有

$$f^{-1}\circ f=id_X \quad 及 \quad f\circ f^{-1}=id_Y$$

定理 3 设$f: X\longrightarrow Y$及 $g: Y\longrightarrow X$是两个映射，并且满足$g\circ f=id_X$，则f是单射，g是满射。

证明

i) 若$f(x_1)=f(x_2)$则有

$$x_1=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))$$
$$=(g\circ f)(x_2)=x_2$$

由定义f是单射。

ii) 若$g(Y)\neq X$，则存在$x_0\in X$但$x_0\notin g(Y)$。设$f(x_0)=y_0\in Y$，故$g(y_0)=g(f(x_0))=x_0\in g(Y)$。这就产生了矛盾。因而必有$g(Y)=X$，即$g$是满射。

定理 4 设映射$f: X\longrightarrow Y$与 $g: Y\longrightarrow X$满足

$$g\circ f=id_X, \qquad f\circ g=id_Y,$$

则f与g均为双射，并且它们互为逆映射，即有

$$f=g^{-1}及\ g=f^{-1}$$

证明 由定理3，f为单射，g为满射；以及g为单射，f为满射。从而f和g均为双射，另一方面，由$f(g(y))=y$表明，$g(y)=f^{-1}(y)$对任何$y\in Y$成立，所以$g=f^{-1}$。

同理，由 $g(f(x))=x$ 表明，对任何 $x\in X$，$f(x)=g^{-1}(x)$。所以 $f=g^{-1}$。

推论 设 $f: X\longrightarrow Y$ 为双射，则 f^{-1} 也是双射，并且 $(f^{-1})^{-1}=f$。

证明 因为 f 是双射，所以 f^{-1} 存在，并且

$$f^{-1}\circ f=id_X,\quad f\circ f^{-1}=id_Y$$

把 f^{-1} 视为定理中的 g，则 g 不仅是双射而且

$$f=g^{-1}=(f^{-1})^{-1}$$

2.6 直接象与原象

设 $f: X\longrightarrow Y$ 是映射。在2.1中我们定义过象集 $f(X)$。现在假设 A 是 X 的一个部分，我们一样可以定义集

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}$$

并称 $f(A)$ 为 A 在 f 下的**直接象**，或简单地说成是 A 在 f 下的象（图13）。

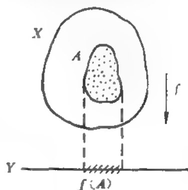

图 13

反过来，若 B 是 Y 的一个部分，称集

$$\{x: f(x)\in B\}$$

为 B 在 f 下的**原象**，记为 $f^{-1}(B)$（图14）。若 B 是只含一个元素 b 的集时，就用 $f^{-1}(b)$ 来代替 $f^{-1}(\{b\})$。此时 $f^{-1}(\{b\})$ 即为2.1中所说的 b 的原象。

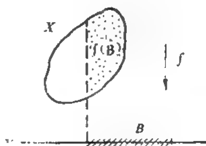

图 14

我们必须特别强调，这里的 f^{-1} 并不表示逆映射。因为一般而言，此时 f^{-1} 未

必具有映射的意义。但如果f是双射，由2.5，这时逆映射便存在。于是记号$f^{-1}(B)$将会出现两种不同的含义：它既可以看成B在映射f^{-1}下的直接象I'，又可以看成B在f下的原象I。但我们不难证明此时两者是相同的。

事实上，若$x\in I$。此时x便是某个y在f下的原象，即存在$y\in B$，使$y=f(x)$。由于f是双射，故有

$$y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$$

即x是y在f^{-1}下的象，所以$x\in I'$，从而$I\subseteq I'$。

反过来，若$x\in I'$，此时x便是某个$y\in Y$在f^{-1}下的一个直接象，即存在$y\in B$使$x=f^{-1}(y)$。由于f是双射，故有

$$x \overset{f}{\longmapsto} y$$

因之x是y在f下的原象，所以$x\in I$，从而$I'\subseteq I$。

综合上述讨论便有$I=I'$。

设f是X到Y内的任意一个映射，而A、B分别是X、Y的子集。一般地，有如下的关系

$$ff^{-1}(B)\subseteq B,\quad f^{-1}f(A)\supseteq A$$

这是两个非常重要的包含关系（参考图13和图14），只有在一定条件下才能有相等关系（见本章习题8、9）。

§3 等价关系

尽管我们事先并没有对集合给定它的结构，但我们却可以在它的元素之间引入一些关系。

3.1 二元关系

设E是集。称与E的元素序偶(x, y)有关的一个性质

P为E内的一个二元关系，或简称关系。

例1 设Z是有理整数集，其中"元素x能被元素y整除"是Z内的一个关系。

例2 设P是平面点的全体。在平面上给定直线l，于是"点A和点B在l上有相同的直投影"是P内的一个关系。

例3 "实数x与实数y之差是正数"是R内的一个关系。

一般而言，设$\mathscr{R}$是事先给定的与E中的元素序偶(a, b)有关的一个命题。此命题对有些元素序偶可以成立，而对另一些元素序偶可以不成立。如果对有序偶(a, b)命题$\mathscr{R}$成立，则谓"a与b有关系$\mathscr{R}$"，并记为$a\mathscr{R}b$，否则便谓没有关系。所以从更一般观点来看，我们可以把积集$E \times E$到P内的一个映射看成是E内的一个二元关系，其中P只含两个元素，即"真"与"假"。当$(a, b) \longmapsto$真时便说"a与b有关系"。

既然关系与序偶有关，所以我们并不能从$a\mathscr{R}b$推出$b\mathscr{R}a$，例如，取$E = \mathbb{R}$，$\mathscr{R}$为命题"$a-b$是负数"。这时$a\mathscr{R}b$当且仅当$a<b$，显然不可能同时有$b\mathscr{R}a$。

3.2 等价关系

设$\mathscr{R}$是E内的一个关系。我们要问$\mathscr{R}$是否可以具有如下性质：

i) $x\mathscr{R}x$ （自反性）？

ii) $x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$ （对称性）？

iii) $x\mathscr{R}y$且$y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z$（传递性）？

显然，并不是每一个E上的关系都具有上述三种性质的。例如实数集中"严格大于"的关系就无自反性与对称性。又如在由全体平面直线所成的集D中，"直线l_1与直线l_2垂直"的关系虽有对称性但无自反性和传递性。

为了方便以后对集合元素进行分类，我们需要引入"等价关系"这一概念。

定义 E内的关系$\mathscr{R}$如果满足下面三个性质便称是E内的一个等价关系：

i） $\forall x\in E \Longrightarrow x\mathscr{R}x$（自反性），

ii） $\forall x\in E$，$\forall y\in E$，$x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$（对称性），

iii） $\forall x,y,z\in E$，$x\mathscr{R}y$且$y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z$（传递性）。

由此可见，3.1中的例1与例3所述的关系不是等价关系，而例2所述的关系则是等价关系。下面是几个等价关系的例子：

例4 $\mathbf{R}$内的关系"实数x与y之差是有理数"是一等价关系。

例5 设E是平面上三角形全体所成之集，关系"三角形a与三角形b全等"是E的一个等价关系。

例6 设$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$为自然数集。记

$$D=\{(a, b): a, b\in \mathbf{N}\}$$

是$\mathbf{N}$的一切序偶所成之集。设(m, n)与(m', n')为D内任意两个元素，$\mathscr{R}$是D内的这样一个关系：

$$(m, n)\mathscr{R}(m', n') \Longleftrightarrow m+n'=m'+n$$

容易验证$\mathscr{R}$是D内的一个等价关系。

（注：$(m, n)\mathscr{R}(m', n')$可以看成是有理整数集$\mathbf{Z}$的关系式$m-n=m'-n'$。）

例7 设$\mathbf{Z}$是有理整数集。设

$$E=\{(p, q): p, q\in \mathbf{Z}且q\neq 0\}$$

是$\mathbf{Z}$内一切序偶（但第二元素不为零）所成之集。设(p,q)与(p',q')是E内任意两个元素，$\mathscr{R}$是E内的这样一个关系：

$$(p, q)\mathscr{R}(p', q') \Longleftrightarrow pq'=p'q$$

容易验证$\mathscr{R}$是E内的一个等价关系。

（注：$(p, q)\mathscr{R}(p', q')$可以看成是有理数集Q内的关系式$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$。）

当$\mathscr{R}$是等价关系时习惯上就改写$x\mathscr{R}y$为$x\sim y$。

3.3　等价类

等价关系在这里的一个重要应用是借助它对集合进行分类。

设$\mathscr{R}$是集E的一个等价关系。若$x\in E$，则由一切满足$x\sim y$的那种y所成之集，便称为x关于$\mathscr{R}$的一个等价类，并记为C_x。显然，C_x是E的一个子集。属于C_x的每一个元素都叫做C_x的一个代表元素。

例 8　设P是平面点的全体，即

$$P=\{(x, y); x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$$

令$p_1=(x_1, y_1)$，$p_2=(x_2, y_2)$是P内任意两个元素。如果$x_1-x_2=0$，我们便说p_1与p_2有关系$\mathscr{R}$。

容易验证，$\mathscr{R}$是P上的一个等价关系。并且，若$p_0=(x_0, y_0)$，那么C_{p_0}便构成平面上通过(x_0, y_0)且与x轴垂直的直线。反之，任何与x轴垂直的同一条直线上的点，它们彼此都有关系$\mathscr{R}$，并且构成P的一个等价类。

定理 5　设$\mathscr{R}$是集E内的一个等价关系，C_x表示x关于$\mathscr{R}$的等价类。则$x\sim y$，当且仅当$C_x=C_y$。

证明　假定$x\sim y$。

对任意$z\in C_y$，有$y\sim z$。于是由等价关系的传递性，又有$x\sim z$，从而$z\in C_x$，即有$C_y\subseteq C_x$。另一方面，由等价关系的对称性，亦有$y\sim x$。故按刚才证明又有$C_x\subseteq C_y$。由此证明$C_x=C_y$。

反过来，假定$C_x = C_y$。

由于$x \sim x$，所以$x \in C_x$，从而$x \in C_y$，即$y \sim x$，由对称性得$x \sim y$。定理证毕。

因为类C_x与类C_y要么重合，要么不相交，所以有

推论 x与y没有关系$\mathscr{R}$，当且仅当$C_x \cap C_y = \varnothing$。

现在我们看到，既然E中的每一个元素x都属于某一类C_x，并且不同的类是不会相交的，所以有

$$E = \bigcup C_x$$

亦即等价关系$\mathscr{R}$实现了对E的一个分划（图15）。

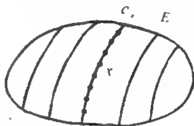

图 15

例9 在有理整数集$\mathbf{Z}$中定义关系$\mathscr{R}$为：

$$x \mathscr{R} y \Longleftrightarrow x - y \text{是偶数。}$$

易证这是$\mathbf{Z}$上的一个等价关系，它将$\mathbf{Z}$分划成两个等价类C_1与C_2，其中C_1为所有奇数所成，C_2为所有偶数所成。

3.4 商集

E的关于等价关系$\mathscr{R}$的所有等价类构成一个新的集，称为E关于$\mathscr{R}$的商集，并记成$E/\mathscr{R}$。

例10 对于例9中的等价关系$\mathscr{R}$，$E/\mathscr{R}$只包含两个元素C_1与C_2，即$C_1 = \{$一切奇数$\}$，$C_2 = \{$一切偶数$\}$。

例11 对于例8中的等价关系$\mathscr{R}$，$P/\mathscr{R}$有无穷多个元素，它们与实数集$\mathscr{R}$具有一一对应关系，即对每个实数x，可令它与$P/\mathscr{R}$中的一个元素

$$C_x = \{ (x, y): -\infty < y < +\infty \}$$

相对应。

例12 由于例6中的等价关系$\mathscr{R}$，$D/\mathscr{R}$的元素今后将被

定义为有理整数。我们暂不解释这样定义的合理性，但容易看出，$D/\mathscr{R}$的元素与有理整数有着一一对应的关系。例如，有理整数3可与$D/\mathscr{R}$的元素{…，(4，1)，(5，2)…}相对应；有理整数－2可与$D/\mathscr{R}$的元素{…，(0，2)，(1，3)…}相对应，等等。

例13 由于例7中的等价关系$\mathscr{R}$，$E/\mathscr{R}$的元素今后将被定义为有理数。我们暂不解释这样定义的合理性，但容易看出，$E/\mathscr{R}$的元素与有理数有着一一对应的关系。例如，有理数2/3可与$E/\mathscr{R}$中的元素{…，(2，3)，(4，6)，…}相对应，有理数－2可与$E/\mathscr{R}$中的元素{…，(－2，1)，(－4，2)，…}相对应，如此等等。

商集是现代数学的一个强有力的武器。它在下面实数构造理论中起着极其重要的作用。

3.5 序关系

定义 设X是集。X内的一个二元关系（记为$\leqslant$）称为一个序关系，如果

1° 对每一个$x \in X$，有$x \leqslant x$；

2° 对x内的任意三个元素x，y，z，如果$x \leqslant y$且$y \leqslant z$，则有$x \leqslant z$；

3° 对X内的任意两个元素x，y，如果$x \leqslant y$且$y \leqslant x$，则有$x = y$。

如果X内存在上述的关系$\leqslant$，则说X是一个由关系$\leqslant$所确定的有序集。关系$x \leqslant y$也可以写成$y \geqslant x$。若$x \leqslant y$且$x \neq y$，则记成$x < y$或者$y > x$。

例

1° 取$X = \mathbf{R}$。通常的不等关系$x \leqslant y$就是一个序关系，

2° 设X是集A的所有部分组成的集。X内元素间的包

含关系$x\sqsubseteq y$是一个序关系。

3° 取$X=\{1,2,3,\cdots\}$。关系"y是x的倍数"是X内的一个序关系。

定义 设X是有序集。X内两个元素x和y被说成是可比较的，如果不是$x\leqslant y$就是$y\leqslant x$；如果任何两个元素总是可比较的，则说X是**全序集**。

前述三个例子中，只有第一个例子中的序才是全序，而其它两个集合的序都不是全序。

§4 同 构

上一节我们讨论了集合内元素之间的二元关系，特别是等价关系，它使我们得以把一个集按等价关系分解成若干个等价类之并。这一节，我们要研究两个集合A与$\bar{A}$之间的一种对应关系——同构。同构的概念在近世代数中是一个十分重要的基本概念。

定义 设集A内定义了代数运算$\circ$，集$\bar{A}$内定义了代数运算$\bar{\circ}$。Φ是A到$\bar{A}$上的一个双射。如果Φ具有性质

$$\Phi(a\circ b)=\Phi(a)\,\bar{\circ}\,\Phi(b)$$

则称Φ对于运算$\circ$、$\bar{\circ}$来说，是A到$\bar{A}$上的一个**同构映射**。当这种映射存在时，便说A与$\bar{A}$关于运算$\circ$，$\bar{\circ}$同构。

例1 设$A=\{1,2,3\}$，$\bar{A}=\{甲,乙,丙\}$。并设$\circ$与$\bar{\circ}$分别为A与$\bar{A}$上的代数运算，其规则为

$\circ$	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

$\bar{\circ}$	甲	乙	丙
甲	丙	丙	丙
乙	丙	丙	丙
丙	丙	丙	丙

并令Φ是A得$\bar{A}$上的映射，其对应法则为

Φ：1⟼甲，2⟼乙，3⟼丙

则Φ关于运算$\circ$、$\bar{\circ}$来说是A到$\bar{A}$上的同构映射。或者说，集A与$\bar{A}$关于运算$\circ$、$\bar{\circ}$同构。

例2 设Q是有理数集，其上定义的运算是普通的加法"+"。Φ_1和Φ_2是Q到其自身上的映射。它们的对应法则是：

Φ_1：$x \longmapsto x$

Φ_2：$x \longmapsto -x$

容易验证，这两个映射关于加法均为Q到Q上的同构映射（即自同构映射）。

如果A、$\bar{A}$关于运算$\circ$、$\bar{\circ}$来说存在一个同构映射，那么容易验证，如果$\circ$满足结合律，则$\bar{\circ}$一定也满足结合律，反之亦然；如果$\circ$满足交换律，则$\bar{\circ}$一定也满足交换律，反之亦然。

更有进者，若A上定义了两种运算$\circ$和$\oplus$，$\bar{A}$上也定义了两种运算$\bar{\circ}$和$\bar{\oplus}$，并且映射Φ不仅对运算$\circ$、$\bar{\circ}$来说是A到$\bar{A}$上的一个同构，而且对运算$\oplus$、$\bar{\oplus}$来说也是A到$\bar{A}$上的一个同构，那么如果$\circ$，$\oplus$满足分配律，则$\bar{\circ}$，$\bar{\oplus}$也一定满足分配律。

由此可知，如果A与$\bar{A}$关于运算$\circ$、$\bar{\circ}$同构，那么凡是一种完全可以用运算$\circ$计算得出的性质必然也反映在$\bar{A}$上，反之亦然。因此，就运算$\circ$对A，运算$\bar{\circ}$对$\bar{A}$所产生的结果来看，A与$\bar{A}$并无本质的差别，所以完全有理由把它们视为等同。例如例1中的1与甲，2与乙，以及3与丙，除了表示形式与称呼的不同之外，从代数的观点出发，它们完全没有什么不同。

例3 集D以及其上的关系$\mathscr{R}$如3.4中的例12所述。我们可以把集$\mathbf{Z}=D/\mathscr{R}$的元素定义为整数。理由如下：

设z_1，z_2属于集$\mathbf{Z}=D/\mathscr{R}$，并且假设(m_1, n_1)是z_1的一个代表元素，(m_2, n_2)是z_2的一个代表元素。令(m_1+m_2, n_1+n_2)所属的等价类z_3为z_1与z_2之和，并记为$z_3=z_1+z_2$。不难证明如此定义的加法与代表元素的选取无关。

我们还可以定义$(m_1m_2+n_1n_2, m_1n_2+m_2n_1)$所属的等价类为$y_1$与$y_2$之积，并记此等价类为$y_1\cdot y_2$。一样不难证明，这个运算（或称为乘法）与代表元素的选取无关。

最后，我们考虑$\mathbf{N}$到$\mathbf{Z}$内的映射Φ，

Φ：$n\ (\in\mathbf{N})\longmapsto\Phi(n)=(n, 0)$所属的类读者可以证明，$\Phi$是$\mathbf{N}$到$\Phi(\mathbf{N})\ (\subset\mathbf{Z})$的一个同构映射（关于加法和乘法）。所以完全有理由把$\Phi(\mathbf{N})$看成是自然数集，而把$\mathbf{Z}$看成是$\mathbf{N}$的一个扩张，即整数集。这就是由自然数集出发构造整数集的一个严谨过程。

例4 集E与关系$\mathscr{R}$如上节例13，我们可以把集$\mathbf{Q}=E/\mathscr{R}$的元素定义为有理数。其理由是：

设$\alpha\in\mathbf{Q}$，并设(p, q)为α的一个代表元素；
设$\beta\in\mathbf{Q}$，并设(r, s)为β的一个代表元素。在$\mathbf{Q}$内定义加法$+$与乘法$\cdot$如下：

定义 $\alpha+\beta$为$(ps+pr, qs)$所属的等价类；定义$\alpha\cdot\beta$为(pr, qs)所属的等价类。一样可以证明，这两种运算均与代表元素的选取无关。

考察$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Q}$内映射ψ，

ψ：$a\ (\in\mathbf{Z})\longmapsto\psi(a)=(a, 1)$所属的类，可以证明，$\psi$是$\mathbf{Z}$到$\psi(\mathbf{Z})\ (\subset\mathbf{Q})$上的一个同构映射。

既然**Z**与**Q**的一个子集ψ(**Z**)同构，我们就完全有理由把与整数m相对应的ψ(m)看成是m，并同样称之为是整数m(如果有些读者对此不习惯的话，不妨称ψ(m)为有理整数m，并记作$\overline{m}$聊以与m相区别)，而把集ψ(**Z**)与**Z**看成一样，并同样称之为整数集**Z**。这样一来，**Q**(称之为有理数集)便成为**Z**的一个扩张了。我们就是通过这样的方法在整数集的基础上构造有理数的。

§5 可数集与不可数集

5.1 集的势

在集合论中，我们经常要比较两个集合所含元素的多少。如果它们是有限集，我们只要将它们的元素分别数一下就可以判定孰多孰少。但如果是两个无限集，用数元素的办法显然行不通。然而我们不难发现，一个集的元素，如果数的结果是某个自然数n，那么这个集合实际上与自然数的子集{1，2，…，n}存在着双方一对一的对应关系。数的过程无非是在作具体的对应而已。因此，集A与集B之间如果存在着一个双射ψ，那么非常自然地可以认为它们含有一样多的元素。为此，我们有

定义 若集A与B之间存在着双方一对一的对应关系，则称A与B有相同的势，并记为$A\sim B$(读A与B对等)。

一个集A的势记为$\overline{A}$。当A为有限集时，我们定义$\overline{A}=A$的元素数n。这样一来，集合的“势”便是有限集的“元素个数”的一种自然的推广。

5.2 可数集与不可数集

自然数集**N**是一个很重要的无限集。许多集合往往要与

它进行比较。

定义 如果集A与自然集$\mathbb{N}$对等，则称A为**可数**(**可列**)集。可数集的势记为$\aleph_0$。（读成阿列夫零）。

显然，集A为可数的充分而必要条件是可以将A中所有元素一个不漏地排成一个无穷序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中$m\neq n$时$a_m\neq a_n$。每一个元素下的足标反映了$\mathbb{N}$与A的一种对应关系：$\varphi: n\longmapsto\varphi(n)=a_n$。这里的$\varphi$是$\mathbb{N}$到$A$的一个双射。

有限集与可数集统称为**至多可数集**。

定理6 每一个无限集必含有一个可数子集。

证明 设A为无限集。任取$a_1\in A$，因A是无限集，故$A\setminus\{a_1\}$亦为无限集，故可取$a_2\in A\setminus\{a_1\}$，同理$A\setminus\{a_1, a_2\}$也是无限集，从而又可取$a_3\in A\setminus\{a_1, a_2\}$。无限地进行这个过程，就得到$A$的一个可数子集$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。

定理6说明，可数集所具有的势是一切无限集所具有势的最小者。

定理7 至多可数个可数集的并仍然是可数集。

证明 不失一般性，我们假定有可数个可数集，它们是：

$$A_1=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \cdots\}$$
$$A_2=\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \cdots\}$$
$$A_3=\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \cdots\}$$

……………………………………………

我们可以将$S=\bigcup_{K=1}^{\infty}A_k$的元素给以如下的排列

$$S=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)},$$

$a_4^{(1)}, a_3^{(2)}, \cdots\}$。

然后依次除去重复元素，即知S的元素可以一一编号而与自然数集N一一对应，从而有$\bar{S}=\aleph_0$。

推论 有理数全体Q是可数的。

证明 记$A_0=\{0\}$，对每一个正整数n（≥ 1），记$A_n=\{\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \cdots\}$.这些集合每一个都是可数集。故由定理，$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$为可数，从而Q$=B\cup A_0$为可数。

5.3 区间〔0，1〕的不可数性

无限集不一定是可数集。例如〔0，1〕即为不可数集。

定理8 区间〔0，1〕为不可数集。

证明 为了使十进小数有唯一的表示形式，我们约定，对每一个非零有限小数都写成循环小数。例如把0.23改写为0.22999…。

现在我们采用反证法。假设〔0，1〕为可数，它的元素便可无一遗漏地排成一个序列：

$$[0, 1]=\{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots\}$$

其中$q_i=0.\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(i)}\cdots$为上面约定的互不相同且属于〔0，1〕的十进小数。今构造十进小数

$$x=0.p_1p_2p_3\cdots p_n\cdots$$

其中p_i可任意地选取，只要使$p_n\neq\alpha_n^{(n)}(n=1,2,\cdots)$并使$x$是一个无限小数。为了确定起见，我们不妨令

$$p_i=\begin{cases}1, & \text{若}\alpha_i^{(i)}\neq 1\\ 2, & \text{若}\alpha_i^{(i)}=1\end{cases}$$

于是，显然有

1° $x\in[0, 1]$；

2° $x\neq q_n$ $(n=1, 2, \cdots)$。

这便与〔0，1〕$=\{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots\}$的假定相矛盾！故〔0，1〕不可数。

由于$\mathbb{R}=(-\infty, +\infty)$可与〔0，1〕成一一对应（这个对应如何构作请读者考虑），所以实数全体$\mathbb{R}$也是一个不可数集。实数集$\mathbb{R}$的势记为$\aleph$（读作阿列夫）。

§6 量词及例

6.1 量词

设X是集。P是与X的元素有关的一个性质。我们把"X内存在元素x具有性质P"这一断言记为$(\exists x)P$，而把"X内每一个元素x都具有性质P"这一断言记为$(\forall x)P$。符号$\exists$和$\forall$称为量词或限定记号。

设A为X内具有性质P的那些元素x所成之集。显然有

1° $(\exists x)P$，当且仅当$A\neq\varnothing$。因之，

$$非((\exists x)P)\Longleftrightarrow 非(A\neq\varnothing)\Longleftrightarrow A=\varnothing$$
$$\Longleftrightarrow(\forall x)(非P) \qquad (1)$$

2° $(\forall x)P$，当且仅当$A=X$。因之

$$非((\forall x)P)\Longleftrightarrow 非(A=X)\Longleftrightarrow C_A\neq\varnothing$$
$$\Longleftrightarrow(\exists x)(非P) \qquad (2)$$

数学中屡会碰到一些断言，它们可以看成是某些量词的复合。因之借助规则（1）和（2）便能对这些断言的否定作机械的运算。

6.2 例

1．设f是单实变量的实函数。断言"f在x_0连续"按定义意谓：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(\in O(x_0, \delta))\Longrightarrow$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

其中记号$O(x_0, \delta)$表示x_0的一个δ邻域。这个断言可分解为若干个断言的复合。首先，它表示

$$(\forall \varepsilon)P_1$$

其中P_1是性质"$\exists \delta>0, \forall x(\in O(x_0, \delta))\Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$"。而$P_1$又可以表示为

$$(\exists \delta)P_2$$

其中P_2是性质"$\forall x(\in O(x_0, \delta))\Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$"。如果把不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$的成立看成是性质$P_3$，那么$P_2$即为

$$(\forall x)P_3$$

所以"f在x_0不连续"就意味着

$$非(\forall \varepsilon)P_1=(\exists \varepsilon)(非P_1)=(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(非P_2)=(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)(非P_3)$$

因为(非P_3)即为$|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$。故$f(x)$在$x_0$不连续即为

"存在$\varepsilon>0$，对任何的$\delta>0$，都存在属于$O(x_0, \delta)$的x，使$|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$成立"。

2° $f: I\longrightarrow R^1$在区间I上一致连续，意味着：

$$“\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1, x_2(|x_1-x_2|<\delta)\Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon”$$

所以f在I上不一致连续即为

$$“\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, \exists x_1, x_2(|x_1-x_2|<\delta)\Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon”$$

习　题

1. 设集$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$有$n$个元素，计算它的子集个数。

2. X、Y、Z为三集。下列结论正确否？

a. $X\cup Y=X\cup Z$，蕴涵$Y=Z$；

b. $X\cap Y=X\cap Z$，蕴涵$Y=Z$。

3. X、Y、Z为三集。证明

$$(X\cap Y)\times Z=(X\times Z)\cap(Y\times Z),$$

$$(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)。$$

4. 证明集合的并与交满足交换律、结合律与分配律。

5. 设A、B、C为三集。证明

a. $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$，

b. $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$。

6. 在R内引入法则

$$a\vee b=\sup(a, b)\text{ 与 } a\wedge b=\inf(a, b)。$$

验证

a. $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，

b. $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$，

c. $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\wedge(b\wedge c)$，

d. $(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$。

7. 设a，$b\in$R，证明下列各等式

a. $\sup(a, b)-\inf(a, b)=|a-b|$，

b. $\sup(a, b)+\inf(a, b)=a+b$，

c. $\sup(a, b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$，

d. $\inf(a, b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$，

e. $\sup(-a, -b) = -\inf(a, b)$,

f. $\inf(-a, -b) = -\sup(a, b)$。

8. 设f：$X \to Y$为映射。若f为满射，则对Y的每一个部分Z，有$f(f^{-1}(Z)) = Z$。但若f不是满射，则一般地有$f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$。

9. 设f：$X \to Y$为映射。若f为单射，则对X的每一个部分Z，有$f^{-1}(f(Z)) = Z$。但若f不是单射，则一般地有$f^{-1}(f(Z)) \supseteq Z$。

10. 设f：$X \to Y$和g：$Y \to Z$是两映射。设$h = g \circ f$，若f和g是单射，则h是单射；若f和g是满射，则h是满射；若h是单射，则f是单射，但g不一定是单射；若h是满射，则g是满射，但f不一定是满射。

11. 构造$[a, b]$与$[0,1]$；$(0,1)$与$(-\infty, +\infty)$以及$[0, 1]$与$(0, 1)$之间的一一对应。

12. 设X、Y为两个各含有n个元素的有限集，f是X到Y内的一个映射，则下述条件彼此等价：

i) f是单射；

ii) f是满射；

iii) f是双射。

13. 设f：$E \longrightarrow F$为映射，B与B'为F的部分，则有

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$$

若A，A'是E的部分，则有

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f'(A'),$$

$$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A'),$$

并且可以有$f(A\cap B')\neq f(A)\cap f(A')$。

14. 设E、F为两有序集。$f: E\longrightarrow E'$和$g: E'\longrightarrow E$是这样的两个递减映射，它们对每一个$x\in E$和每一个$x'\in E'$，有

$$g(f(x))\geqslant x \text{ 和 } f(g(x'))\geqslant x'$$

成立，则有

$$f\circ g\circ f=f \text{ 及 } g\circ f\circ g=g$$

15. 试各举一例：

a. 有上确界而无下确界的数集；

b. 既含上确界又含下确界的数集；

c. 有最大元而无最小元的数集。

16. 设X为集。Y为X的一切部分所成之集，$f: X\longrightarrow Y$为映射，X'为X中满足$x\notin f(x)$的那些x所成之集。证明X'不可能是X的某个元素在f下的象。即不存在$x\in X$，使$x\stackrel{f}{\longmapsto}X'$。由此推出不存在$X$到$Y$上的映射。

17. 设E为集，A为E的一个部分。设函数f_A在A上等于1，在$E\backslash A$上等于零。我们称f_A是A的特征函数。证明：

$$f_{A\cap B}=f_A\cdot f_B,\ f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_A\cdot f_B,$$

$$f_{E\backslash A}=1-f_A$$

18. 设E是$\mathbf{N}$的有限子集所成之集。定义E到$\mathbf{N}$内的函数f如下：

$$f(A)=\sum_{x\in A}x \text{ 且 } f(\varnothing)=0,$$

a. 设$A_n=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$，试计算$f(A_n)$

b. 证明f是满射；

c. 证明f不是单射；

d。 计算$f^{-1}(\{3\})$。

19。 设集$A=\{a, b, c\}$，其上定义代数运算如下：

$\circ$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

找出所有A到A的双射。对于代数运算$\circ$来说，它们哪些是同构映射，哪些不是？

20。 证明单调函数的不连续点至多可数。

21。 一个实数称为是代数数，如果它是某个代数方程$f(x)=0$的根，其中$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是带有整系数的多项式。证明所有整系数多项式是可数的，并由此推出代数数的全体是可数的。

22。 用量词表达下列断言：

a。 $\{x_n\}$无界；

b。 $\{x_n\}$非无穷大量；

c。 $\{x_n\}$不收敛；

d。 $\{x_n\}$不存在收敛的子列。

第二章　实数的构造以及有关实数的定理

*§1　实数的构造

1.1　建立实数理论的必要性

实数理论是数学分析的逻辑基础。为使数学分析的全部理论令人信服，必须要求实数有一个严谨而完备的结构。虽然远在古希腊时代，人们为了表示不可公度的线段而引入了无理数，但它的演绎体系完全建立在直观的基础上。很多数学家由于对实数理论缺乏足够的认识，所以产生了论证的错误（如Bolzano关于连续函数零点存在定理的证明），或者无法证明自己提出的结论（如Cauchy不能证明他自己提出的收敛准则的充分性）。

分析的逐渐严密化，才促使有些有卓见的数学家去整理和研究实数的结构。

要建立实数的严谨理论，最困难的当然是无理数的定义。Cauchy虽然为分析的严密化作出了重大的贡献，但他在阐述无理数的概念时，却出现了逻辑上的错误。按Cauchy的说法，无理数可以看成是一个有理数列的极限。但是，序列$\{x_n\}$存在极限，这又是什么呢？按Cauchy自己的定义是"若存在数A，当n趋向无穷时，有$|x_n-A|\to 0$"。

显然，如果A是无理数，它应该是未曾定义的。这就产生了概念的自身循环。但很奇怪，这个明显的逻辑上的错误，居然在很长一段时间内未曾被数学家们所发现。

后来Cantor发现，有理数域内的收敛序列，必然是Cauchy序列，然而一个有理数的Cauchy序列，却未必收敛到某个有理数，这是由于有理数有“空隙”的缘故。所以Cantor就用Cauchy序列的等价类来定义实数。他所遵循的，是将一个不完备的体，“嵌”到另一个完备的体中，以实现完备化的思想。这与我们在上一章§4中例3，例4介绍的如何从N出发构造Z，以及从Z出发构造Q的思想同出一源。这个方法，在近代数学研究完备化方面，有着普遍的意义。

1.2 Cauchy序列和等价的Cauchy序列

1° 实数构造的原则

通常，一个实数可以看成是十进有限小数列的一个极限。但在分析中，很多实数，例如e、π等等，并非作为十进小数的极限，而是作为有理数列的极限而定义。这就启发我们能否把一个“收敛”的有理数列定义为一个实数呢？如果这是可行的话，那么很自然，两个收敛到同一极限的有理数列，应该认为是定义了同一个实数。换句话说，把具有有限极限的有理数列的全体记为E；把E内两个元素具有相同极限者视为等同的关系叫做$\mathscr{R}$；而把$E/\mathscr{R}$中的一个元素（注意，$E/\mathscr{R}$的元素是E内关于$\mathscr{R}$的等价类）定义为一个实数，看来是合乎情理的。当然在定义实数的整个过程中，我们只能利用有理数及其已知性质，而不能包含实际上假设了实数存在的任何东西。

一个有理数列（$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$），何时可以说趋

向一个有限极限呢？直观地看，是对充分大的n，所有的r_n彼此都很接近。或者说，对充分大的m和n，r_m-r_n的绝对值非常地小。说得更确切一些，就是对任意给定的有理数$\varepsilon>0$，不论它怎样小，自某个N之后的所有m和n，恒有不等式$|r_m-r_n|<\varepsilon$成立。

两个有理数列$(r_1, r_2, \cdots)$，$(r_1', r_2', \cdots)$何时可以说趋向同一个极限呢？直观地看，是对充分大的n，所有的r_n和r_n'都很接近。或者说，对充分大的n，r_n-r_n'的绝对值可以非常小。说得更确切一些，就是对任意给定的有理数$\varepsilon>0$，不论它怎样小，自某个N之后的所有n，恒有不等式$|r_n-r_n'|<\varepsilon$成立。

以上是我们定义E和实数的原则。仅需注意，ε的选取必须在有理数的范围内。因为除了有理数之外，我们别无所知。一般地，我们可以在1/10，1/100，1/1000，…之中选取ε。

2° 等价的Cauchy序列

定义 设$(r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$是有理数域Q的一个元素序列。如果任给Q中的一个元素$\varepsilon>0$，恒存在正整数N，使

$$m, n\geqslant N\Longrightarrow |r_m-r_n|<\varepsilon$$

则称序列$(r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$是Q的一个Cauchy序列。

记Q内的Cauchy序列全体为E。

定义 设$(r_1, r_2, \cdots)$与$(r_1', r_2', \cdots)$为E的两个元素。如果任给Q中的一个元素$\varepsilon>0$，恒存在正整数N，使

$$n\geqslant N\Longrightarrow |r_n-r_n'|<\varepsilon$$

则称这两个序列是等价的。

若E中两个元素是等价的，便称它们有关系。显然这种关系是自反的和对称的。我们还要证明它是传递的，从而证明它是一种等价关系。

事实上，设$\{r_n\}$，$\{r_n'\}$，$\{r_n''\}$是E的三个元素。其中$\{r_n\}$和$\{r_n'\}$等价，$\{r_n'\}$和$\{r_n''\}$等价。设$\varepsilon>0$为事先给出的任意一个有理数，于是存在正整数N与N'，使

$$n\geqslant N\Longrightarrow|r_n-r_n'|<\varepsilon/2$$

$$n\geqslant N'\Longrightarrow|r_n'-r_n''|<\varepsilon/2$$

故 $n\geqslant\max\{N,N'\}\Longrightarrow|r_n-r_n''|\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

因此序列$\{r_n\}$与$\{r_n''\}$等价。这就证明了关系是传递的。

3° 实数的定义

记上述的这种等价关系为$\mathscr{R}$，若$\{r_n\}$和$\{r_n'\}$等价，今后就记作$\{r_n\}\sim\{r_n'\}$。

置$E/\mathscr{R}=\mathbb{R}$，并称$\mathbb{R}$的元素（再说一遍，它的元素是Q内的某个等价类）为实数。

为了使读者信服实数集$\mathbb{R}$确实可以看成是有理数域Q的一个扩张，我们必须完成如下两件事：

i） 我们要在$\mathbb{R}$内定义加法与乘法，使它具有普通加法与普通乘法的性质；

ii） 存在$\mathbb{R}$的一个真子集$\widetilde{\mathbb{Q}}$，它关于上述运算与Q同构。

1.3 实数的加法

定义了实数之后，接下来我们要在它的内部引入两种运算——加法和乘法。这里先定义加法。为此引入两个引理。

1° 有关两个Cauchy序列和的性质

引理1 设$\{r_n\}$，$\{s_n\}$为E的两个元素，则$\{r_n+s_n\}$也的是E一个元素。

证明 设$\varepsilon>0$为任意给定的有理数，则存在整数N_1，N_2，使

$$m,\ n\geqslant N_1\Longrightarrow|r_m-r_n|<\varepsilon/2$$
$$m,\ n\geqslant N_2\Longrightarrow|s_m-s_n|<\varepsilon/2$$

于是

$$m,\ n\geqslant\max\{N_1,\ N_2\}\Longrightarrow$$
$$|(r_m+s_m)-(r_n+s_n)|\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

这说明$\{r_n+s_n\}$也是一个Q中的Cauchy序列，因而是E的一个元素。

引理2 若$\{r_n\}\sim\{r_n'\}$，$\{s_n\}\sim\{s_n'\}$，则$\{r_n+s_n\}\sim\{r_n'+s_n'\}$

证明 若$\varepsilon>0$为任意给定的有理数，则存在正整数N_1与N_2，使

$$n\geqslant N_1\Longrightarrow|r_n-r_n'|<\varepsilon/2$$
$$n\geqslant N_2\Longrightarrow|s_n-s_n'|<\varepsilon/2$$

于是

$$n\geqslant\max\{N_1,\ N_2\}\Longrightarrow$$
$$|(r_n+s_n)-(r_n'+s_n')|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

2° 实数的加法

以引理1和引理2为基础，我们能够定义实数的加法。

设x、y为R的任意两个元素，并设$\{x_n\}$是x在E内的一个代表元，$\{y_n\}$是y在E内的一个代表元。于是$\{x_n+y_n\}$是E的一个元素（引理1），并且它在E内的类，只与x和y有关（引理2）。我们称$\{x_n+y_n\}$所属的类为x与y之和，并记为$x+y$。

3° R关于加法是一个可换群。

一个定义了运算∘的集A，如果它关于这个运算是可结

合的，并且存在一个中间元素 e，使对A内每一个元素x，成立$x\circ e=e\circ x=x$，此外，如果对A的每一个元素x，都存在逆元素x^{-1}，使$x\circ x^{-1}=x^{-1}\circ x=e$，则称$A$是一个群。如果一个群是可交换的，则称此群为**可换群**或**Abel群**。

我们可以验证R关于加法构成一个交换群。

设z是R的另一个元素，并设$\{z_n\}$是z在E内的一个代表元。于是序列$\{(x_n+y_n)-z_n\}$所属的类便是$(x+y)+z$，序列$\{x_n+(y_n+z_n)\}$所属的类便是$x+(y+z)$。而$(x_n+y_n)+z_n=x_n+(y_n+z_n)$，所以

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

因之，实数关于加法是可结合的。同样可知，实数关于加法还是可交换的。所以有理数所具有的这两个性质，实数也一样具有。

把$(0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$所属的类，记为$\overline{0}$，显然对每一个实数$x$，都有等式$x+\overline{0}=\overline{0}+x=x$成立。所以$\overline{0}$是R关于加法的一个中间元素。它与有理数域中的零元0有相同的性质。我们不妨也称之为R的**零元**，并且由于即将看到的理由，我们甚至还可以把它记为0。

我们把$\{x_n\}$所属的类与$\{-x_n\}$所属的类，彼此称为R内**互反**的两个元素。如果把前者记为x，后者便记为$(-x)$，显然有$x+(-x)=0$。

由上可知，R关于加法构成一个**可换群**。

1.4 实数的乘法

1° 有关两个Cauchy序列积的性质

引理 3 若$\{r_n\}\in E$，则r_n有界。即存在有理数$A>0$，使对一切n，都有$|r_n|\leqslant A$成立。

证明 取$\varepsilon=1$，则存在正整数N，使

$$n\geqslant N\Longrightarrow |r_m-r_N|<1$$

令

$$A=\max\{|r_1|,\ |r_2|,\ \cdots,\ |r_{N-1}|,\ |r_N|+1\}$$

于是对一切n，有

$$|r_n|\leqslant A$$

引理 4　设$\{r_n\}$；$\{s_n\}$为E的任意两个元素，则$\{r_n\cdot s_n\}$也是E的一个元素。

证明　设$\varepsilon>0$为任意给定的有理数，则存在有理数$A>0$与$B>0$，使对一切n，有

$$|r_n|\leqslant A \text{ 和 } |s_n|\leqslant B$$

其次，存在正整数N_1和N_2，使

$$m,\ n\geqslant N_1\Longrightarrow |r_m-r_n|<\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B}$$

$$m,\ n\geqslant N_2\Longrightarrow |s_m-s_n|<\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A}$$

于是

$$m,\ n\geqslant\max\{N_1,\ N_2\}\Longrightarrow$$

$$|r_ms_m-r_ns_n|=|r_m(s_m-s_n)+(r_m-r_n)s_n|$$

$$<A\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B}\cdot B=\varepsilon$$

引理 5　若$\{r_n\}\sim\{r_n'\}$，$\{s_n\}\sim\{s_n'\}$，则$\{r_ns_n\}\sim\{r_n's_n'\}$

证明　设$\varepsilon>0$为任意给定的有理数，则存在有理数$A>0$，$B>0$，使对一切n，有

$$|r_n|\leqslant A \text{ 和 } |s_n'|\leqslant B'$$

另一方面，存在着正整数N_1，N_2，使

$$n\geqslant N_1\Longrightarrow |r_n-r_n'|<\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B'}$$

$$n \geqslant N_2 \Longrightarrow |s_n - s_n'| < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{A}$$

于是

$$n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \Longrightarrow$$

$$|r_n s_n - r_n' s_n'| = |r_n (s_n - s_n') + (r_n - r_n') \cdot s_n'|$$

$$< A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{B'} \cdot B'$$

$$= \varepsilon$$

2° 实数的乘法

假定 x，y 是 R 的任意两个元素，$\{x_n\}$ 是 x 在 E 内的一个代表元，$\{y_n\}$ 是 y 在 E 内的一个代表元。于是 $\{x_n y_n\}$ 是 E 的一个元素（引理 4），并且它在 E 内的类，只与 x 和 y 有关，而与 x，y 的代表元选取无关（引理 5）。我们称 $\{x_n \cdot y_n\}$ 所属的类为 x 与 y 之积，并记为 $x \cdot y$。

3° R是域

一个集合，如果其内定义了两种代数运算（习惯上以加法和乘法称呼之），并且它关于加法成可换群，关于乘法是可结合的，而乘法关于加法又是可分配的，便称 A 为环。如果 A 是一个交换环(即对乘法也是可交换的环)，0 是 A 关于加法的中间元素（零元），并且 $A\backslash\{0\}$ 对于乘法成一群，则称 A 为域（或体）。

我们可以验证 R 关于加法和乘法不仅是一个交换环，而且是一个域。

我们把（1, 1, …, 1, …）所属的类记为 $\bar{1}$。显然，对每一个实数 x，都成立等式 $x \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot x = x$，这个 $\bar{1}$ 可以看成是 R 关于乘法的中间元素（称为单位元素），它与有理数域中的单位元 1 有相同的性质。今后无论在写法上或者

在称呼上，我们都把 $\bar{1}$ 与1不加区别。

现在我们首先可以验证，R是以1为单位元素的交换环。事实上，象对加法所作的推理一样，可知如此定义的乘法是可结合、可交换的，并且关于加法为可分配的。也就是说，实数R是一个具有单位元素的交换环，它保持了有理数乘法的特性。

为了验证R是一个域，我们先证明

引理6 设 x 是R的一个非零元素，则存在有理数 $\alpha>0$ 及 x 的一个代表元 $\{x_n\}$，使对每一个 n，或者恒有 $\alpha\leqslant x_n$，或者恒有 $-\alpha\geqslant x_n$。

证明 设 $\{s_n\}$ 是 x 的任意一个代表元。因为 $x\neq 0$，所以序列 $\{s_n\}$ 与序列（0，0，…，0，…）不等价。故

i）存在有理数 $\varepsilon_0>0$，使对任何一个正整数 N，恒有大于 N 的 n 存在，满足 $|s_n-0|=|s_n|\geqslant\varepsilon_0$。

ii）由于 $\{s_n\}$ 是Cauchy序列，所以对上述 ε_0，存在正整数 P，使

$$m,\ n\geqslant P\Longrightarrow|s_m-s_n|<\varepsilon_0/2$$

由i)，存在 $p(>P)$，使 $|s_p|\geqslant\varepsilon_0$，我们不妨假定 $s_p\geqslant\varepsilon_0$，因为对 $s_p\leqslant-\varepsilon_0$ 的情况一样可以讨论。于是由ii)，

$$m\geqslant P\Longrightarrow|s_m-s_p|<\varepsilon_0/2$$

$$s_m\geqslant s_p-|s_m-s_p|>\varepsilon_0-\varepsilon_0/2=\varepsilon_0/2$$

若取 $\varepsilon_0/2=\alpha$，并且当 $n<P$ 时，令 $x_n=\varepsilon_0/2=\alpha$；当 $n\geqslant P$ 时，令 $x_n=s_n$，则 $\{x_n\}$ 不仅是 x 的一个代表元，而且对每一个 n，还有 $x_n\geqslant\varepsilon_0/2=\alpha$。

定理1 R是域。

证明 由于前面已经证明R是交换环，再由引理6，所

以只需证明 $1 \neq 0$，以及对每一个R的非零元素均可逆。

然而，等式 $1 \neq 0$ 是极为显然的。因为序列（1，1，…，1，…）和序列（0，0，…，0，…）不等价。

设 x 为R的一个非零元素。我们证明 x 有逆。由引理6，存在有理数 $\alpha > 0$ 及 x 的一个代表元 $\{x_n\}$，使对每一个 n，$|x_n| \geqslant \alpha$ 成立。下面证明 $\{x_n^{-1}\} \in E$，设有理数 $\varepsilon > 0$，于是存在正整数 N，使

$$m,\ n \geqslant N \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon\alpha^2$$

于是

$$m,\ n \geqslant N \Longrightarrow |x_m^{-1} - x_n^{-1}| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m||x_n|} < \frac{\varepsilon\alpha^2}{\alpha^2} = \varepsilon$$

所以 $\{x_n^{-1}\} \in E$，$\{x_n^{-1}\}$ 所属的类 y 与 $\{x_n\}$ 所属的类 x，显然满足 $x \cdot y = y \cdot x = 1$，故 x 有逆。定理证毕。

1.5 实数域是有理数域的扩张

对每一个 $r \in$ Q，称序列 $\{r,\ r,\ \cdots,\ r,\ \cdots\}$ 为**常驻序列**。显然，它是一个Cauchy序列。设 $\varphi(r)$ 是它所属的等价类。这是一个实数。于是 φ 便是Q到R内的一个映射。直接可以验证，φ 是Q到 φ（Q）（$\subset$ R）上关于加法与乘法的一个同构映射。这个映射，将Q的零元映射为R的零元；将Q的单位元，映射为R的单位元。所以我们完全有理由，把每一个有理数 r 在R内的象 $\varphi(r)$ 与 r 视为等同，并且干脆把它记成 r。这样做，对于初学者来说，可能会显得不习惯。如果是这样，我们不妨把（$r,\ r,\ \cdots,\ r,\ \cdots$）所属的类 $\varphi(r)$ 暂时记为 $\bar{r}$，并相应地称之为**有理实数**。

1.6 实数的比较

1° **集R⁺** 记 R^+ 是R的这样一个子集：它的每一个元

素，都有一个非负Cauchy序列为其代表元。

由此立即可得

性质1 若 $x\in\mathbf{R}^+$，$y\in\mathbf{R}^+$，则 $(x+y)\in\mathbf{R}^+$ 且 $x\cdot y\in\mathbf{R}^+$。

性质2 有 $\mathbf{R}^+\cap(-\mathbf{R}^+)=\{0\}$，此即说，若 $x\in\mathbf{R}^+$ 且 $-x\in\mathbf{R}^+$，则必 $x=0$。

事实上，若 $x\in\mathbf{R}^+$，则存在一个非负Cauchy序列为其代表元。设这个代表元为 $\{r_n\}$。于是对每一个 n，都有 $r_n\geqslant 0$，同理，$(-x)$ 有一个代表元 $\{s_n\}$，其中对每一个 n，都有 $s_n\geqslant 0$，从而 $\{r_n\}\sim\{-s_n\}$，于是对任意给定的有理数 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$n\geqslant N\Longrightarrow|r_n-(-s_n)|<\varepsilon$$

特别，

$$n\geqslant N\Longrightarrow r_n<\varepsilon$$

故 $\{r_n\}\sim(0,0,\cdots,0,\cdots)$，此即说，$x=0$。

性质3 有 $\mathbf{R}^+\cup(-\mathbf{R}^+)=\mathbf{R}$，此即说，若 $x\in\mathbf{R}$，那么或者 $x\in\mathbf{R}^+$，或者 $-x\in\mathbf{R}^+$。

事实上，当 $x=0$ 时，结论是显然的；若 $x\neq 0$，结论可由引理6得出。

2° **R内的序关系** 设 x、y 都是实数。若 $y-x\in\mathbf{R}^+$，我们就记成 $x\leqslant y$ 或 $y\geqslant x$，当 x，y 为有理实数时，这便是有理数之间的不等关系。

由定义，关系 $x\geqslant 0$ 与 $x\in\mathbf{R}^+$ 同义。

R 内的关系 $x\leqslant y$，显然是自反的。它也是传递的。因为若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$，则 $y-x\in\mathbf{R}^+$ 且 $z-y\in\mathbf{R}^+$，故由性质1，知

$$z-x=(z-y)+(y-x)\in\mathbf{R}^+,$$

即$x \leqslant z$。

此外，若$x \leqslant y$且$y \leqslant x$，则$y-x \in \mathrm{R}^+ \cap (-\mathrm{R}^+)$。由性质2，得$y-x=0$，即$y=x$。

所以R内的关系$x \leqslant y$是一个序关系。

定理 2 R是全序集。

证明 若x和y是两个不同实数。由性质3，$y-x \in \mathrm{R}^+$或$x-y \in \mathrm{R}^+$，故$x \leqslant y$与$y \leqslant x$两者必居其一，而仅当$x=y$时，上述两个不等式关系才同时成立(性质2)。

可以证明有关不等式的所有常用规则也适用于实数。此地不再一一列举。最后我们要特别地定义实数x的绝对值概念：若$x \geqslant 0$，置$|x|=x$；若$x<0$，置$|x|=-x$。

有了绝对值的概念之后，便可引入任意两个元素x与y之间的距离。从而可以进一步定义实数序列的收敛，以及实数的Cauchy序列等相应的概念。

§2 有关实数的定理

2.1 Q在R内的稠密性

定理 3 每一个实数都是某个有理实数列的极限。

证明 设y是任意一个实数。由实数的定义，y是某个Cauchy有理数序列$(r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$所属的类。令$\varphi(\bar{r}_n)=r_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，我们证明

$$\lim_{n \to +\infty} \bar{r}_n = y$$

设ε为任给正实数。我们首先证明，存在有理实数$\bar{a}$，使$0<\bar{a} \leqslant \varepsilon$。事实上，由引理6，存在着非负有理Cauchy数列$\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \cdots)$为ε的一个代表元，并且存在

有理数$\alpha \geqslant 0$，使对每一i，有$\varepsilon_i \geqslant \alpha$，若令$\bar{a}=\varphi(\alpha)$，于是非负有理数列$\{\varepsilon_1-\alpha, \varepsilon_2-\alpha, \cdots, \varepsilon_i-\alpha, \cdots\}$是$\varepsilon-\bar{a}$的一个代表元，故$\varepsilon-\bar{a}\in R^+$，即$\bar{a}\leqslant\varepsilon$，又$\bar{a}>0$，所以有$0<\bar{a}\leqslant\varepsilon$。

由于$\{r_n\}$是Cauchy序列，故对$\alpha=\varphi^{-1}(\bar{a})$，存在正整数$N$，使

$$m, n\geqslant N \Longrightarrow -\alpha<r_m-r_n<\alpha$$

如果我们能够证明，当$m\geqslant N$时，有$|\bar{r}_m-y|<\varepsilon$，本定理也就证明了。

考察实数$\bar{r}_m-y$，按定义，它是$(r_m-r_1, r_m-r_2, \cdots)$所属的类。将这个序列的前$(N-1)$项都换成0，由此得到一个与原序列等价的序列$(s_1, s_2, \cdots)$，并且对每一个$n$，都有

$$-\alpha<s_n<\alpha$$

$\{s_n\}$既与数列$\{r_m-r_1, r_m-r_2, \cdots\}$等价，所以它也是$\bar{r}_m-y$的一个代表元。故由$-\alpha<s_n<\alpha$，便有

$$-\bar{a}<\bar{r}_m-y<\bar{a} \qquad (m\geqslant N)$$

特别有

$$|\bar{r}_m-y|<\bar{a}\leqslant\varepsilon$$

按定义，有$\lim\limits_{n\to+\infty}\bar{r}_n=y$ 证毕。

2.2 Cauchy收敛准则

Q内的Cauchy序列这一概念，也可推广到R内。

定义 设$\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$为实数列。如果对任意给定的正数$\varepsilon$，恒存在正整数$N$，使

$$m, n\geqslant N \Longrightarrow |u_m-u_n|<\varepsilon$$

成立，则称$\{u_n\}$为R的一个Cauchy序列。

定理 4（收敛原理） 为使 R 内的序列 $\{u_n\}$ 存在有限极限，当且仅当 $\{u_n\}$ 是一Cauchy序列。

证明 必要性。设 $\{u_n\}$ 存在极限 u，即对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$n\geqslant N\Longrightarrow|u_n-u|<\varepsilon/2$$

$$m\geqslant N\Longrightarrow|u_m-u|<\varepsilon/2$$

故当 $m, n\geqslant N$ 时，有

$$|u_m-u_n|=|(u_m-u)+(u-u_n)|\leqslant|u_m-u|+|u_n-u|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

所以 $\{u_n\}$ 是Cauchy序列。

充分性 设 $\{u_n\}$ 是Cauchy序列。由定理3，对每一个 $n\geqslant1$，存在有理实数 $\bar{r}_n$，使

$$|u_n-\bar{r}_n|<1/n$$

可以证明，由此得到的有理实数列 $\{\bar{r}_n\}$，是 R 的一个Cauchy序列。事实上，对任给的正实数 ε，存在正整数 N，使

$$m, n\geqslant N\Longrightarrow|u_m-u_n|<\varepsilon/3$$

于是，

$$m, n\geqslant\max\{N, 3/\varepsilon\}\Longrightarrow$$

$$|\bar{r}_m-\bar{r}_n|\leqslant|\bar{r}_m-u_m|+|u_m-u_n|+|u_n-\bar{r}_n|$$

$$\leqslant\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n}<\varepsilon$$

由同构性，$\{r_n\}$ 便是 Q 的Cauchy序列。设它所属的类为 y，由定理3，有 $\bar{r}_n\to y$。

因为 $u_n-\bar{r}_n\to0$ $(n\to+\infty)$，故由极限运算法则，有

$$u_n=(u_n-\bar{r}_n)+\bar{r}_n\longrightarrow y$$

证毕。

实数的Cauchy收敛原理又称实数的完备性定理。它是一个很有理论价值的重要定理。以前我们按定义欲证序列$\{u_n\}$收敛，必须事先知道这个极限值。而这个准则只涉及$\{u_n\}$本身的特性。

例如，设

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$$

可以证明序列$\{x_n\}$发散。事实上，对任意自然数n，可取$m = 2n$，恒有

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} >$$

$$n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

故对$\varepsilon = 1/2$，永远找不到这样的正整数N，使m，$n \geqslant N$时，有$|x_m - x_n| < 1/2$成立。故由收敛原理，$\{x_n\}$不可能收敛。

2.3 确界定理

很多分析教本在建立有关极限理论的时候，往往假定实数的一个性质作为出发点，例如承认“任何非空囿于上(下)的实数集存在上(下)确界”。现在我们可以作为定理4的一个重要推论得出来。

定理5 任何非空囿于上(下)的实数集必存在唯一的上(下)确界。

证明 假设E是R的一个非空囿于上的子集（对于囿于下的情况，一样讨论），b_0是E的一个上界，a_0是E的一个元素。由于E是有上界又是非空的集合，所以这种b_0和a_0总是存在的。

我们用归纳的方法，定义两个Cauchy序列。其中一个是由E的元素所组成的递增数列（a_0，a_1，a_2，…），另一个是由E的上界组成的递减序列（b_0，b_1，b_2，…），并且对每一个n，使它们满足不等式

$$b_n - a_n \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0) \qquad (1)$$

除非到第i步时，所取a_i正好是E的上确界，此时定理即告成立，否则上述过程总可以无限地进行下去。下面阐述具体选取b_n与a_n的过程。

数a_0与b_0是一开始就选定的，所以不等式（1）对$n=0$成立。现在假定a_0，a_1，…，a_{p-1}以及b_0，b_1，…，b_{p-1}已选定，并且满足

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{p-1}$$

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{p-1}$$

$$b_i - a_i \leqslant 2^{-i}(b_0 - a_0) \qquad (0 \leqslant i \leqslant p-1)$$

我们按如下规则选取a_p和b_p：

若$\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$是$E$的上界，则令

$$b_p = \frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1}), \qquad a_p = a_{p-1}$$

若$\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$不是$E$的上界，则存在$a_p \in E$，使

$$a_p > \frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$$

此时便令$b_p = b_{p-1}$（见图16）

以上两种情况，不论哪一种，都有

$$b_p \leqslant b_{p-1} \quad , \quad a_p \geqslant a_{p-1}$$

其中对一切i（$0 \leqslant i \leqslant p$），$a_i \in E$，$b_i$是$E$的上界，并且

$$b_p - a_p \leqslant \frac{1}{2}(b_{p-1} - a_{p-1})$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot 2^{-(p-1)}(b_0 - a_0) = 2^{-p}(b_0 - a_0)$$

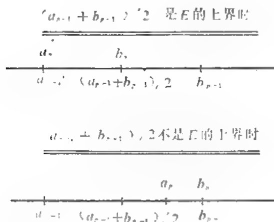

图 16

这个选取a_i与b_i的过程，可以无限制地继续下去。

设$\varepsilon>0$，于是对充分大的N，可使

$$2^{-N}(b_0-a_0)<\varepsilon$$

若m，$n\geqslant N$，并且$m\geqslant n$，则有

$$a_N\leqslant a_n\leqslant a_m\leqslant b_N$$

故

$$a_m-a_n\leqslant b_N-a_N\leqslant 2^{-N}(b_0-a_0)<\varepsilon$$

即$\{a_n\}$是Cauchy序列。由定理4，序列$\{a_n\}$收敛。设

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a$$

又由(1)，$b_n-a_n\to 0$，因之

$$b_n=a_n+(b_n-a_n)\to a$$

下面证明a即为E的上确界。事实上，若$x\in E$，则对每一个n，有$x\leqslant b_n$，故对不等式两边取极限，有$x\leqslant a$，即a是E的上界。同理，若y是E的上界，则对每一个n，

$y \geqslant u_n$，故$y \geqslant a$，即a是E的最小上界。从而a是E的上确界。

而上确界若存在，是唯一的（见第一章1.4）。

2.4 有关单调数列的一个定理

定理6 单调增加而有上界的数列以及单调减少而有下界的数列都存在极限。

证明 我们只就单调增加有上界的情况予以证明。

设$\{u_n\}$是单调增加而有上界的数列。由一切u_n（$n \geqslant 1$）所成之集，是$\mathbf{R}$的一个非空有上界子集。故由定理5，存在上确界β，我们证明，β实际上便是数列$\{u_n\}$的极限。

任给$\varepsilon > 0$，由上确界的定义，存在正整数N，使$\beta - \varepsilon < u_N$，由于数列是单调增加的，所以对一切大于或等于$N$的$n$，也有

$$\beta - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \beta$$

从而$|u_n - \beta| < \varepsilon$，此即

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta$$

将$\{u_n\}$换成$\{-u_n\}$，并利用所证结果，便可证明定理之后半部分。

由此可知，单调数列的变化趋势总是单一的。以单调增加数列来说，如果它无上界，那么它的增长便不受限制，可以"一往无前"地增加下去，这时数列便以无穷大为其"极限"；如果数列有上界，那么它的增长便受限制，虽然不断增大，但不能逾越某一极限。所以如果把"趋向无穷大"也称作是有极限的话，那么便可以说，"任何一个单调数列都存在极限"。

2.5 Bolzano－Weierstrass定理

由定理 6，我们可以直接得到一个重要而便于应用的推论，称之为Bolzano－Weierstrass定理。

定理7 设 $\{u_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 为一有界实数列，则恒可以从其中取出一个收敛子序列。

证明定理 7 的关键，在于证明任何一个实数序列，必存在一个单调增加或单调减少的子序列。

证明 设 I 是这样的一个自然数子集：若$i\in I$，意谓数 u_i 都不小于它后面的所有项，即恒有

$$u_i \geqslant u_{i+p} \quad (p=1, 2, 3, \cdots)$$

现分两种情况进行讨论：

i） 若I为无限集

设 i_1, i_2, …是I中按递增次序排成的一列正整数，由I的性质，有

$$u_{i_1}\geqslant u_{i_2}\geqslant u_{i_3}\geqslant\cdots,$$

而 $\{u_{i_k}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 由定理假设为有界,所以根据定理 6，它存在极限。

ii） 若I为有限集（包括空集）。

令j_1是I的一个上界，并且 $j_1\in I$，此时 j_1比I中的任何数都严格地大。所以当 $n\geqslant j_1$时，对每一个u_n，都不可能使不等式

$$u_n\geqslant u_{n+p}$$

对一切$p\in N^+$成立。故存在正整数 $j_2(>i_1)$，使$u_{j_2}>u_{j_1}$，对于j_2，又存在正整数 j_3（$>j_2$），使 $u_{j_3}\geqslant u_{j_2}$，如此等等。序列（u_{j_1}，u_{j_2}，…）是 $\{u_n\}$ 的一个子序列，并且是单调增加而有上界的序列，所以也存在极限。证毕。

当数列 $\{u_n\}$ 无界时，虽然不再有上述定理，但我们

恒可从$\{u_n\}$中选出子序列使它趋向$+\infty$或$-\infty$，我们把这个性质的证明，留给读者。

Bolzano－Weierstrass定理的应用见§3。

2.6 闭区间套定理

闭区间套定理，也是数学分析的一个基本定理。它从另一种角度表达了实数的连续性。我们也可以从这个定理为出发点，来证明极限和实数的其它定理。

定理 8 设$[a_n, b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$为闭区间族，并且对每一个n，有

$$[a_n, b_n]\supseteq[a_{n+1}, b_{n+1}]$$

此外，还满足$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$（即这些区间的长度收缩到零）。则存在唯一的点$\xi$属于每一个这种闭区间。

证明 先证公共点ξ的存在性。

考察由所述闭区间族的左端点所成的序列$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$和右端点所成的序列$(b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)$。

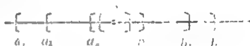

图 17

显然，序列$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$是囿于上的单调增加序列（任何一个$b_i$都是它们的上界）；序列$(b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)$是囿于下的单调减少序列（任何一个$a_i$都是它们的下界），由定理 6，极限

$$\lim_{n\to+\infty}a_n \quad 与 \quad \lim_{n\to+\infty}b_n$$

都存在，并且对每一个i，都有

$$b_i \geqslant \lim_{n\to+\infty} a_n \quad 及 \quad a_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} b_n$$

但另一方面

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

令上式的公共极限为ξ，于是，

$$a_i \leqslant \xi \leqslant b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

即$\xi \in [a_n,\ b_n]$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$

次证ξ的唯一性。

若除ξ之外，还存在η（$\neq \xi$），它也是这些闭区间的公共点，于是对每一个n，应有

$$|b_n - a_n| \geqslant |\xi - \eta| > 0$$

但这与$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$的假设矛盾。

如果把闭区间套换成开区间套，定理的结论是否还能保持？如果闭区间套中区间的长度不趋于零，又会得出什么结论？这些问题留给读者思考。

2.7 有限覆盖定理

有限覆盖定理，也叫Heine－Borel定理。它可以从闭区间套定理推出，也可以由这个定理出发，推出闭区间套定理。我们这里采用Lebesgue的证法。在讲述定理之前，我们先引入“开覆盖”这一概念。

定义 设A是数直线上的一个子集。$G = \{G_\alpha\}$是数直线上的一族开区间。如果对每一个$x \in A$，至少存在G中的一个成员G_1，使$x \in G_1$，则称G是集A的一个**开覆盖**。

例 设A是数直线。开区间族$\{(-n,n)\}_{(n=1,2,\ldots)}$便是$A$的一个开覆盖；开区间族$\{(n,n+1)\}_{(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)}$则不是$A$的开覆盖，因为每一个整数，均不属于上述区间族的任何一个区间；开区间族$\{(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n})\}_{(n=1,2,\ldots)}$是半闭半开区间$(0, 1]$的一个开覆盖。

定理9 若有界闭区间$[a, b]$为某开区间族G所覆盖，则恒可从G中选出有限个开区间覆盖$[a, b]$。

证明 考察$[a, b]$内具有下述性质的x的全体，并将它记为E：

若$x\in E$，表示区间$[a, x]$能够用G中有限个开区间覆盖。

因为a显然满足上述性质，所以$a\in E$，即E非空；又因为所考察的x都在$[a, b]$中，所以E囿于上。由确界定理，E有上确界。记

$$c=\sup E$$

显然$c\leqslant b$，我们要证明c属于E，并且$c=b$，从而完成对定理的证明。

根据定理假定，c必属于G中某个开区间(α, β)，由上确界的性质，存在$x'\in E$，

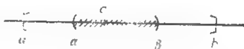

图 18

使$\alpha<x'\leqslant c$，既然$x'\in E$，说明$[a, x']$可被G中有限个区间$\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_k$来覆盖，今将开区间$(\alpha, \beta)$添入这有限个开区间，并记

$$H=\sigma_0\cup\sigma_1\cup\cdots\cup\sigma_k\cup(\alpha, \beta)$$

显然H覆盖闭区间$[a, c]$，因此$c\in E$。

现在证明$c=b$，假设不然，则$c<b$，因此在(α, β)内可取x''，使$c<x''<b$，而H同样覆盖$[a, x'']$，因而$x''\in E$，这便与c是E的上确界矛盾。所以只能$c=b$，即$b\in E$，从而$[a, b]$能够被G中有限个开区间覆盖。证毕。

定理要求G是开区间族，以及基本区间$[a, b]$是有界闭区间。这两个条件缺少任何一个，都会使定理失真。

例1　开区间族$\{(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n})\}$ $(n=1, 2, \ldots)$覆盖区间$(0, 1]$，但不能从其中选取有限个开区间覆盖$(0,1]$，这是因为$(0, 1]$非闭的缘故。

例2　闭区间族

$$[1, 2], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}], \cdots, [\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}], \cdots\cdots$$

覆盖$[0,1]$，但不能从其中选取有限个闭区间覆盖$[0,1]$，这是因为它们不是开区间的缘故。

有些读者也许会产生疑惑，认为既然对有界闭区间$[a, b]$来说，成立着有限覆盖定理，为什么比它少了两个端点的开区间(a, b)，却反而不能有限覆盖了呢？这些读者之所以有此疑问，原因在于对定理成立的前提不明确。是存在着有限个开区间覆盖一个集呢？还是在此集的任意给定的开覆盖中存在着有限个开区间覆盖此集？如果是前者，那么只要它有界，我们用一个有界开区间就可以把它完全覆盖了，讲Heine—Borel定理也就多此一举。然而要在一集的任意给定开覆盖中，恒能选出有限个开区间把它覆盖，就不是一般的集都能做到的。这里反映了闭区间的一种“紧致”性质，而开区间恰恰失去了这种性质。

当然，具有这种性质的集，不仅仅只有有界闭区间。例如任何一个有限集也都具有这种性质。一个集 A，如果恒能从它的任意一个开覆盖中选取有限个开区间将它覆盖，我们将称这种集为紧集。紧集的概念我们将在第四章再作进一步阐述。

2.8 有关实数定理的相互推证举例

前面我们讲了实数的七个重要定理，它们是"每一个实数都是某个有理数列的极限的定理"，"Cauchy 收敛原理"，"确界存在定理"，"单调有界数列必有极限的定理"，"Bolzano—Weierstrass定理"，"闭区间套定理"以及"Heine—Borel有限覆盖定理"。这七个定理都是彼此等价的。换句话说，我们可以随便从某个定理出发，而推证其余的六个定理。下面仅举一、两个例子，以帮助读者更好了解这些定理之间的关系。

i） 由闭区间套定理出发，证明有限覆盖定理。

我们采用反证法。假设 $[a, b]$ 不能被 $\{G_\alpha\}$ 内有限个开区间覆盖。今把闭区间 $[a, b]$ 两等分。这时至少有一个子区间不能被 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖，不妨用 $[a_1, b_1]$ 表示不能被 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖的那个子区间（如果两个子区间都不能被 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖，则任取其一为 $[a_1, b_1]$）。再把 $[a_1, b_1]$ 两半分，并用 $[a_2, b_2]$ 表示不能被 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖的某个半子区间，并依此类推。我们得到一个闭区间套 $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$，其中每一个闭区间都包含后一闭区间，并且后者长度为前者之半，而这些区间都不能被 $\{G_\alpha\}$ 所有限覆盖。由闭区间套定理，存在点 ξ 为这些区间的公共点。但是另一方面，因为 $\xi \in [a, b]$，所以它必落在 $\{G_\alpha\}$ 的某个开区间 (α, β) 内，即有 $\alpha < \xi < \beta$.

然而，$\xi=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$，故存在自然数 n，使

$$\alpha<a_n\leqslant\xi\leqslant b_n<\beta$$

换言之，$(\alpha,\ \beta)$ 已覆盖 $[a_n,\ b_n]$。但这与 $[a_n,\ b_n]$ 不能被 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖假定相矛盾！

ii) 从Heine—Borel定理出发，证明 Bolzano—Weieratrass定理。

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列，并设它们全部包含在 $[a,b]$ 内。如果它不存在收敛子序列，于是对 $[a,\ b]$ 内的任何一点 x_0，都不可能是 $\{x_n\}$ 的某个子序列的极限。因之恒存在一个邻域 $O(x_0,\ \delta)$，除了 x_0 可能与有限个 x_n 相等之外，其内不含其它的 x_n，而邻域系 $\{O(x_0,\ \delta)\}_{x_0\in[a,b]}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖。故由 Heine—Borel 定理，我们能从 $\{O(x_0,\ \delta)\}_{x_0\in[a,b]}$ 中选出有限个复盖 $[a,\ b]$，当然也覆盖所有的 $\{x_n\}$。但是有限个这种邻域内，至多包含有限个 x_n，这就产生了矛盾。因此 $\{x_n\}$ 必存在收敛的子序列。

iii) 从 Bolzano—Weierstrass 定理出发，证明 Cauchy收敛原理的充分性。

假设 $\{x_n\}$ 是Cauchy实数列。即，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数N，当 $m,\ n>N$时，有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$ 成立。

首先容易证明 $\{x_n\}$ 为有界。故由 Bolzano—Weierstrass定理，它存在收敛子序列x_{n_k}，令

$$\lim_{k\to+\infty}x_{n_k}=c$$

现在证明，对 $\{x_n\}$ 本身，也有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$，事实上，由

于 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，故对上述的 ε，存在正整数 $n_k(>N)$，使不等式

$$|x_{n_k}-c|<\varepsilon/2$$

成立；另一方面，由于 $\{x_n\}$ 是Cauchy序列，所以当 $n>N$ 时，也有

$$|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon/2$$

因之，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-c|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|<\varepsilon$$

按定义，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$，证毕。

§3 闭区间上连续函数的性质

连续函数是数学分析所研究的一类基本函数，其中以定义在闭区间上的连续函数尤为重要。这是因为闭区间具有很重要的一些性质（例如紧致的性质），才导致其上定义的连续函数具有一系列优良的性质。现在我们以 §2的定理为基础，对这些性质作一严格的证明。

3.1 有界性与最大（小）值定理

定理10 设 $[a, b]$ 为有界闭区间，$f: [a, b]\longrightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数。则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，并且能在 $[a, b]$ 上达到最大值与最小值。

证明 i) 有界性的证明。

假定 f 无界。于是对每一个正整数 n 存在 $x_n\in[a, b]$ 使 $|f(x_n)|\geqslant n$，由 Bolzano—Weierstrass 定理，从序列 $\{x_n\}$ 中可以选出一个收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}=x_0$$

因为$a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$，所以$x_0\in[a, b]$（注意，从这里可以看出，如果换成开区间，则$x_0$有可能会落在定义域之外）。由于$f(x)$在$[a, b]$连续，特别在$x_0$连续，所以有

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$$

既然$f(x)$在x_0上有定义，其值必有限（是一个常数），但由$\{x_{n_k}\}$的假设，却有

$$|f(x_{n_k})|\geqslant n_k$$

于是$f(x_0)$不可能为有限。这就产生了矛盾。因而$f(x)$在$[a, b]$上必须有界。

ii）最大值、最小值的存在性。

证法一：

置$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，由i)的证明，有$|M|<+\infty$，另一方面由上确界的定义，对每个正整数$n$，存在着$y_n\in[a, b]$使

$$M-1/n\leqslant f(y_n)\leqslant M$$

成立。于是由Bolzano—Weierstrass定理，存在$\{y_n\}$的收敛子列$\{y_{n_k}\}$，设

$$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k}=y$$

显然$y\in[a, b]$，于是有

$$\lim_{k\to+\infty} f(y_{n_k})=f(y)$$

另一方面，$\lim\limits_{k\to+\infty} f(y_{n_k})=M$，所以有$f(y)=M$，即在

$[a, b]$上存在点y，使函数$f(x)$在其上达到最大值。

同理可证$f(x)$能在$[a, b]$上达到最小值。

证法二：

若$f(x)$在$[a, b]$上不能达到上确界M。于是对每一个x，有$f(x)<M$，考察函数$g(x)=1/(M-f(x))$，$(x\in[a, b])$，它是闭区间$[a, b]$上的连续正函数，故由i)的证明必有界。设$0<g(x)\leqslant K$，则有$f(x)\leqslant M-\frac{1}{K}$ $(x\in[a, b])$。但这与$M=\sup\{f(x)\}$矛盾，所以$f(x)$在$[a, b]$上必能取到上确界，即取到最大值。

3.2 介值定理

定理11 设$[a, b]$为R的有界闭区间，f：$[a, b]\to R$为连续函数，μ为介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个实数。则f能在$[a, b]$的某点处取到值μ。

证明 为确定起见，不妨假设$f(a)<f(b)$

令

$$E=\{x: f(x)\leqslant\mu \text{ 且 } x\in[a,b]\}$$

由于$a\in E$，故E非空；而b显然是E的上界。所以E是一个非空囿于上的实数集。由定理5，它存在上确界ξ。我们证明$f(\xi)=\mu$。

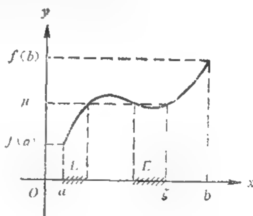

图 19

$\xi\in[a, b]$是显然的。如果$f(\xi)<\mu$，此时$\xi\neq b$，

从而有$\xi<b$，置$\alpha=\mu-f(\xi)$，则$\alpha>0$，因f在ξ连续，所以存在$\xi'\in(\xi,b)$。使$f(\xi')-f(\xi)<\alpha$，即$f(\xi')<\alpha+f(\xi)=\mu$，从而$\xi'\in E$，这与$\xi$是$E$的上确界相矛盾。

其次，如果$f(\xi)>\mu$，此时$\xi\neq a$，从而$\xi>a$，置$\beta=f(\xi)-\mu$，则$\beta>0$，因f在ξ连续，所以存在$\xi''\in(a,\xi)$，使对每一个$x\in[\xi'',\xi]$，有不等式$f(x)-f(\xi)>-\beta$即$f(x)>\mu$成立。另一方面，$f(x)$在$[\xi,b]$上都大于μ，所以在$[\xi'',b]$上不可能含有E的点。换言之，$[\xi'',b]$的每一个点都是E的上界，特别ξ''为E的上界。故ξ不可能是E的最小上界。这也是荒谬的。综上所述，只能是$f(\xi)=\mu$。

推论（关于连续函数零点存在的Bolzano定理） 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$内至少存在一个零点ξ（即存在ξ，使$f(\xi)=0$）。

3.3 Cantor一致连续定理

定理12（Cantor） 设$f\in C_{[a,b]}$，则f在$[a,b]$上一致连续。

证明 假定f在$[a,b]$上不一致连续，这就意味着（第一章6.2例）：

存在着这样的$\varepsilon_0>0$，使对不管怎样的$\eta>0$，恒存在x'，$x''\in[a,b]$：$|x'-x''|<\eta$，但$|f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon_0$。

取$\eta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$，从而相应地可得到$[a,b]$的两个点列$(x_1',x_2',\cdots,x_n',\cdots)$和$(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'',\cdots)$，使对每一个自然数$n$，一方面成立$|x_n'-x_n''|$

$<\frac{1}{n}$，另一方面却成立$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$。

由Bolzano－Weierstrass定理，从$\{x_n'\}$中可以选取收敛子序列$\{x'_{n_k}\}$，设

$$\lim_{k\to+\infty}x'_{n_k}=x_0$$

显然$x_0\in[a,b]$，此外，与下标n_k相应，我们还可得到$\{x''_n\}$的一个子序列$\{x''_{n_k}\}$，从$\lim\limits_{k\to+\infty}(x'_{n_k}-x''_{n_k})=0$可知，亦有 $\lim\limits_{k\to+\infty}x''_{n_k}=x_0$，再由$f(x)$的连续性，得

$$\lim_{k\to+\infty}f(x'_{n_k})=f(x_0)=\lim_{k\to+\infty}f(x''_{n_k})$$

从而对足够大的n_k，有$|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|<\varepsilon_0$，这就产生了矛盾。所以$f(x)$在$[a,b]$一致连续。

3.4 有关反函数的一个定理

定理13 设$f\in C[a,b]$，并且在$[a,b]$上为严格单调增加（或减少），则f是$[a,b]$到$[f(a),f(b)]$或（$[f(b),f(a)]$）上的双射，其逆映射（反函数）f^{-1}定义在$[f(a),f(b)]$（或$[f(b),f(a)]$）上，取值在$[a,b]$中．并且亦为严格单调增加（或减少）的连续函数。

证明 假设f在$[a,b]$上为严格增加。

1）先证f是$[a,b]$到$[f(a),f(b)]$的双射。

若x_1，x_2为$[a,b]$的两个不同点，由函数的严格单调性，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，所以f是单射。

若$a\leqslant x\leqslant b$，则由单调性，有$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$。故

$$f([a,b])\subseteq[f(a),f(b)]$$

另一方面，由定理11，f能取到$f(a)$与$f(b)$之间的每一个值。所以又有

$$f([a, b]) \supseteq [f(a), f(b)]$$

从而$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$，即f是满射。因此f是双射。

因为f是双射，所以存在逆映射f^{-1}。

ii) 次证f^{-1}的严格增加性。

若$f^{-1}(y)$不是严格增加，则在$[f(a), f(b)]$内，存在$y_1 < y_2$，使

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2) = x_2$$

然而由f的单调增加性，有$y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$。这是不可能的。故$f^{-1}$为严格增加。

iii) 最后证明f^{-1}的连续性。

设y_0是$[f(a), f(b)]$上任意一点。我们要证明$f^{-1}(y)$在y_0连续。为了叙述方便，我们假定$f(a) < y_0 < f(b)$，因为当$y_0 = f(a)$或$y_0 = f(b)$时，证明是一样的，不过此时的连续性，应理解为单侧连续。

令$x_0 = f^{-1}(y_0)$，有

$$a < x_0 < b \quad 且 \quad f(x_0) = y_0$$

任给$\varepsilon > 0$，取$\varepsilon' = \min\{\varepsilon, x_0 - a, b - x_0\}$，于是有

$$O(x_0, \varepsilon') \subset (a, b)$$

令$\alpha = x_0 - \varepsilon'$，$\beta = x_0 + \varepsilon'$，$f(\alpha) = \gamma$，$f(\beta) = \delta$。由

$$a \leqslant \alpha < x_0 < \beta \leqslant b$$

得

$$f(a) \leqslant \gamma < y_0 < \delta \leqslant f(b)$$

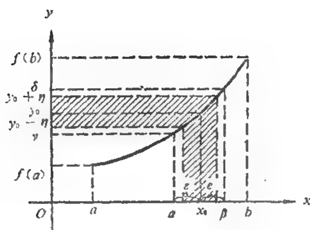

图 20

取$\eta<\min\{y_0-\gamma,\ \delta-y_0\}$，则当$|y-y_0|<\eta$时，有$\gamma<y<\delta$，由$f^{-1}$严格单调性，有

$$f^{-1}(\gamma)<f^{-1}(y)<f^{-1}(\delta)$$

而

$$f^{-1}(\gamma)=\alpha=x_0-\varepsilon'=f^{-1}(y_0)-\varepsilon'$$

$$f^{-1}(\delta)=\beta=x_0+\varepsilon'=f^{-1}(y_0)+\varepsilon'$$

因之，当$y\in O'(y_0,\ \eta)$时，有

$$f^{-1}(y_0)-\varepsilon'<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon'$$

此即

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon'\leqslant\varepsilon$$

由此证明了$f^{-1}(y)$在y_0连续。由y_0的任意性，推得f^{-1}在整个$[f(a),\ f(b)]$上连续。

把f换成$-f$，那么当f为严格减少时，定理结论依然成立。

§4 上、下极限

4.1 上、下极限的概念与定义

Balzano-Weierstrass 定理告诉我们，任何一个无穷序列必存在一个子序列，它或者收敛到某个有限数，或者趋向定号的无穷大。当数列趋向定号无穷大时，我们约定这个数列也称为收敛，并且以定号的无穷大为其极限。

如果序列$\{x_n\}$是收敛的，那么它的任何一个子序列也是收敛的，并且有同一极限；如果序列$\{x_n\}$不收敛，那么它就会有多于一个的子序列，它们收敛到不同的极限。

如果数a是$\{x_n\}$的某个子序列的极限，我们就称a是$\{x_n\}$的一个聚点（或部分极限）。用$\varepsilon-N$语言来表述，就是：对任给的$\varepsilon>0$，以及任意的自然数N，恒存在$n(>N)$，使

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立。换句话说，若a是$\{x_n\}$的一个聚点，则在a的任意一个邻域$O(a)$内，存在无穷多个x_n属于此邻域。聚点与极限的区别在于：若a是$\{x_n\}$的聚点，则还可以有无穷多个x_n落在$O(a)$之外；而若a是$\{x_n\}$的极限，则至多只有有限个x_n落在$O(a)$之外。

于是当$\{x_n\}$不收敛时，它就存在着多于一个的聚点。令E是$\{x_n\}$的聚点的全体。我们称值$\sup E$是$\{x_n\}$的上极限，称值$\inf E$是$\{x_n\}$的下极限，并分别记成

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\sup E \quad 和 \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\inf E$$

例 数列$\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$

含有可数个聚点。它们是0，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，显然有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = 1,\quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = 0$$

4.2 上、下极限的性质

1° 设$\alpha=\sup E$，$\beta=\inf E$，则$\alpha\in E$，$\beta\in E$

这个性质表明，在E内存在最大元α与最小元β。说得更明确一点，即α，β也是$\{x_n\}$的聚点。从而α是$\{x_n\}$的最大聚点，β是$\{x_n\}$的最小聚点。

证明 若$\{x_n\}$不囿于上，则存在子序列$\{x_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = +\infty$$

此即说，$+\infty$是$\{x_n\}$的一个聚点。显然，$\sup E=+\infty$

若$\{x_n\}$囿于上，此时必$\alpha=-\infty$或α为有限。

如果$\alpha=-\infty$，表示$+\infty$和任何有限实数都不是$\{x_n\}$的聚点，因此有$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$（见本章习题5），此时$-\infty$既为$\{x_n\}$的最大聚点，亦为$\{x_n\}$的最小聚点。

如果$\alpha\neq\infty$，由上确界定义，对任给的$\varepsilon>0$，在E内存在着元素A，使$A>\alpha-\varepsilon$，设$O^-(A)$为A的、含在$(\alpha-\varepsilon,\alpha)$内的一个左邻域。因为$A\in E$，所以$A$是$\{x_n\}$的聚点。故在$O^-(A)$内，从而在$(\alpha-\varepsilon,\alpha)$内含有无穷多个$x_n$，按定义，$\alpha$是$\{x_n\}$的聚点，即$\alpha\in E$。

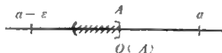

图 21

同理可证$\beta\in E$。

2° 设ε，N为两个事先给定的任意正数，并记

$$\alpha=\sup E=\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n,\quad \beta=\inf E=\underline{\lim_{n\to+\infty}}x_n$$

(一)当α、β均有限时，则在$\{x_n\}$中

i) 有无穷多个x_n，有$x_n>\alpha-\varepsilon$；

ii) 有无穷多个x_n，有$x_n<\beta+\varepsilon$；

iii) 至多有限个x_n，可以有$x_n\geqslant\alpha+\varepsilon$；

iv) 至多有限个x_n，可以有$x_n\leqslant\beta-\varepsilon$。

(二) 当$\alpha=+\infty$时，则对任意正数K，在$\{x_n\}$中有无穷多个x_n，成立$x_n>K$。

(三) 当$\alpha=-\infty$时，则对任意正整K，在$\{x_n\}$中有无穷多个x_n，成立$x_n<-K$。

3° 有等式

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\}=\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geq k}\{x_n\} \qquad (1)$$

及

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k}\{x_n\}=\lim_{k\to+\infty}\inf_{n\geq k}\{x_n\} \qquad (2)$$

成立

证明 我们只证明(1)式，因为(2)式同理可证。

设

$$A_k=\sup_{n\geq k}\{x_n\}\quad 及\quad B_k=\inf_{n\geq k}\{x_n\}$$

显然A_k是关于k的不增数列，B_k是关于k的不减数列。因此

有

$$\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\}=\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geq k}\{x_n\},$$

$$\sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k}\{x_n\}=\lim_{k\to+\infty}\inf_{n\geq k}\{x_n\}。$$

i）若$\alpha=\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n\neq\infty$。

设x为小于α的任意一个实数，并设

$$x<p<\overline{\lim_{k\to+\infty}}x_n=\alpha$$

故存在着无穷多个x_n，满足$x_n>p>x$，从而对每一个自然数k，有

$$x<p\leqslant\sup_{n\geq k}\{x_n\}$$

令$k\to+\infty$，得

$$x<\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geq k}\{x_n\}$$

$$=\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\}\qquad(3)$$

因为x可取得与α任意接近，所以α不可能严格地大于（3）式右端，否则会与（3）式产生矛盾，从而只能

$$\alpha\leqslant\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\}\qquad(4)$$

次设y是大于α的任意一个实数，并设

$$y>q>\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\alpha$$

于是至多有限个x_n可以有$x_n>q>y$，从而当n充分大

时，所有的x_n都不大于q，即对充分大的k，有

$$\sup_{n\geq k}\{x_n\}\leqslant q<y,$$

令$k\to+\infty$，得

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geq k}\{x_n\}=\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\}<y \qquad (5)$$

因为y可取得与α任意接近，所以α不可能严格地小于(5)的左端，否则会与(5)式产生矛盾，从而只能

$$\alpha\geqslant\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{x_n\} \qquad (6)$$

由(4)，(6)，得$\alpha=\inf\limits_{k\geq 1}\sup\limits_{n\geq k}\{x_n\}$。

ii) 当$\alpha=\infty$时，(1)式同理可证。

4° $\{x_n\}$存在极限的充分而必要的条件是

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to+\infty}}x_n$$

习　题

1．设x，$y\in Q$，$y>0$，$\sqrt{y}$为无理数。证明不存在$z\in Q$，使

$$\sqrt[3]{x}=z\pm\sqrt{y}$$

2．若r是有理数，且$r\neq 0$，s是无理数。证明$r+s$及$r\cdot s$是无理数。

3．证明不存在$r\in Q$，使$r^2=2$。

4．若z为无理数，a、b、c、d为有理数，并且$ad-bc\neq 0$，证明$az+b/cz+d$亦为无理数。

5. 若数列$\{x_n\}$无界且非无穷大量。证明必存在$\{x_n\}$的两个子序列，其中一个子序列收敛到有限数，另一个子序列"收敛"到无穷大。

（提示：先用量词表示断言"$\{x_n\}$为无界"与"$\{x_n\}$为非无穷大量"。）

6. 利用 Bolzano－Weierstrass定理证明单调有界数列必有极限。

7. 证明极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x'$，$x''\in O'(x_0, \delta)$时，有不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

成立。当$x_0=\pm\infty$时，如何改述上述充要条件？

8. 有界数列$\{x_n\}$若不收敛，证明至少存在两个子序列，收敛到不同的极限。

9. 如果单调函数$f(x)$能取到$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，则$f(x)$必在$[a, b]$连续。若$f(x)$无单调这一条件，上述结论是否仍真？

10. 设f：$(a, b)\to \mathbf{R}^1$为连续。证明$f(x)$在(a, b)上一致连续，当且仅当$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-} f(x)$存在且有限。

11. 证明(a, b)上一致连续的函数必有界。当区间为无穷时，结论又如何？

12. 证明两个在同一有限区间上一致连续函数的和、差、积，仍为一致连续。举例说明，两个在同一无穷区间上一致连续的函数，其积可以不一致连续。

13. 如果函数在$[a, b]$上连续，又设$a=x_1<x_2<$

$\cdots < x_n = b$，则必存在$\xi \in [a, b]$，使

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Big/ n$$

14. 设实数列$\{u_n\}$满足

$$|u_n - u_{n+1}| < 1/2^n \qquad (n \geq 1)$$

证明$\{u_n\}$是R^1的Cauchy序列。

15. 设实数列$\{a_n\}$满足

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n|$$

证明$\{a_n\}$是Cauchy序列。

16. 求下列各数列的上极限与下极限

i) $a_n = \dfrac{1}{2^{-n} + (-1)^n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

ii) $a_n = \sqrt[n]{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

iii) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{5} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

17. 证明

i) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$；

ii) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} y_n$

18. 若数列$\{x_n\}$收敛，则对任意数列$\{y_n\}$，有

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$$

19. 设$\{a_n\}$为正数序列，证明

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

20. 构造一个实数列 $\{x_n\}$，使每一个实数都是它的聚点。

第三章　级　　数

§1　常数项级数

1.1　基本概念

设

$$f: \quad n \longmapsto f(n) = u_n \quad (n \in \mathrm{N})$$

为给定的一个数列。相应地考察N到R^1的映射

$$S: n \longmapsto S(n) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n$$

从而得到另一个由$\{u_n\}$确定的数列$\{S_n\}$，称由无穷序列构成的序偶（$\{u_n\}$，$\{S_n\}$）为无穷级数（常数项）。

对每一个n，称u_n为此级数的项，称S_n为此级数的部分和。

若$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$（$\neq \infty$），则称此级数是收敛的，否则便称为是不收敛或发散的。

从上可知，一个数列，都对应着一个由它所确定的部分和序列。反之，任何一个数列$\{S_n\}$，也必定是某个数列的部分和序列。实际上，令$S_0 = 0$，则数列$u_n = S_n - S_{n-1}$（$n \geqslant 1$）的部分和序列即为$\{S_n\}$。

习惯上，我们也往往把

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

表示为一个无穷级数。如果这个级数收敛并有和为S，则还把它记成$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，显然在这里我们用了同一个记号$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$来表达"无穷级数"及"无穷级数的和"。当然，如果在概念上不致混淆的前提下，这个记号不失为一种简捷的记号。下面我们均采用这个记号。

1.2 Cauchy收敛准则

由于级数的敛散性归结为它的部分和序列的敛散性，所以我们能应用序列收敛的一些性质来研究级数的一些收敛性质。通常我们对一个级数的敛散问题比之于确定这个级数的和的问题要有兴趣。所以我们将化一定篇幅来研究级数的敛散性问题。

由序列的Cauchy收敛准则，立即可以得出下面的关于级数的Cauchy收敛准则。

定理1（Cauchy收敛准则） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分而必要的条件是：对任意给定的正数ε，总存在正整数N，使对一切大于N的n，不等式

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

对任何正整数p成立。

证明 因为

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=S_{n+p}-S_n$$

故由序列收敛的Cauchy条件，知序列$\{S_n\}$收敛。反之亦然。

例1 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的敛散性。

解 $u_n=1/n^2$，考察

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

故对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n > N$时，不论正整数$p$为何，恒有 $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| < \varepsilon$，从而级数收敛。

例 2　研究级数$\sum_{n=1} \frac{1}{n}$的敛散性。

解　由于

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

故对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$来说，找不到正整数$N$，使当$n > N$时对任何正整数$p$有 $\left|\sum_{k=1}^{p} n_{n+k}\right| < 1/2$ 成立（例如可取$p = n$）。因而按定理级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散。

推论 1　若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则必$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

这只要在定理的Cauchy条件中，取$p = 1$即可。

条件$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$是级数收敛的一个必要条件。我们通常可以由$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\neq 0$来证明级数的发散。但要证明级数收敛，仅有通项趋于零的条件是远远不够的（见例2）。

推论2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛，

这是因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|,$$

所以当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$满足Cauchy条件时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也就满足Cauchy条件。

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$不仅收敛而且具有一系列很好的性质。这种级数称为绝对收敛级数。我们将在§4对它作进一步的研究。

推论3 改变级数的有限项不会改变级数的敛散性。

这是因为级数经过有限项的改变后，其满足或不满足Cauchy条件的性质并无改变。

§2 正项级数

2.1 正项级数的比较判别法

对每一个正整数n，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的每一项$u_n$均为非负，则称此级数为**正项级数**或**非负项级数**。正项级数的敛散性问题容易作一般的处理。因为对于正项级数来说，其部分和序列$\{S_n\}$是一个递增序列，故$\{S_n\}$的变化趋势比

较单一。它要么收敛到一个有限值（此时级数收敛），要么趋向 $+\infty$（此时级数发散）。若系前者，只要指出 $\{S_n\}$ 为有界，若系后者，只要指出 $\{S_n\}$ 为无界。而这些我们往往可以通过与某个已知收敛或发散的正项级数的比较来达到。正项级数的很多敛散性判别法都建立在这个思想之上。

定理 2（正项级数的比较判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数。若存在常数 $A>0$，当 n 充分大时，有

$$u_n \leqslant A v_n$$

则

i） 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛，

ii） 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 亦发散。

这是一个正项级数审敛的最基本定理。由于在微积分中早已证明过，所以证明就不再重复了。但读者必须明瞭，为什么正项级数可以通过比较定理来判定其敛散，而非正项级数为什么不能这样做，其原因究竟是什么？

例 1 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin^3(n+1)}{2^n+n}$$

的敛散性。

解 这是一个正项级数。由于

$$0 \leqslant u_n = \frac{3+\sin^3(n+1)}{2^n+n} \leqslant \frac{4}{2^n}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以原级数收敛。

应用定理 2 有时需要不等式的放大技巧。为此我们将它

改述为应用方便的定理3（证明也从略）。

定理3（比较判别法的极限形式）　设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为两个正项级数，并且$v_n \neq 0$。

i）若$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (<+\infty)$，则由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的收敛可推出$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

ii）若$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (>0)$，则由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的发散可推出$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

特别，当$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (0<l<+\infty)$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同敛散性。

例2　研究级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}$的敛散性。

解　因为$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散，而

$$\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n\to+\infty)$$

$$\frac{n+1}{n^2+1}\Big/\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n\to+\infty)$$

所以这两个级数均发散。

2.2　Cauchy判别法和D'Alembert判别法

定理3虽然比定理2实用，但终究还有不便之处，因为还需要去寻找一个可与之比较的级数。下面介绍Cauchy判

别法与D'Alembert判别法。它们从形式上看只与级数本身的项有关，而实际上是与几何级数比较而得到的一种判别法。

(A) Cauchy 判别法——设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数

i）若存在正数$q<1$及正整数N，使当$n>N$时，有

$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

ii）若存在无穷多个n，使$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明

i） 此时当$n>N$时，有 $u_n\leqslant q^n$。因为$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

ii）此时存在着无穷多个n满足 $u_n\geqslant 1$。因此$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\neq 0$。所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

(A') Cauchy判别法的极限形式——设

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\alpha$$

i） 若$\alpha<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

ii） 若$\alpha>1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；

iii） 若$\alpha=1$，则判别法失效。

证明

i）若$\alpha<1$，则存在正数σ，使$\alpha+\sigma=q<1$
另一方面，由上极限的性质，存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\sqrt[n]{u_n}<\alpha+\sigma=q<1$$

此即（A）之（i）

ii）若$\alpha>1$，则存在正数σ，使$\alpha-\sigma>1$。另一方面，由上极限的性质，存在无穷多个自然数n_k，使

$$\sqrt[n_k]{u_{n_k}}>\alpha-\sigma=q>1$$

此即(A)之(ii)。

iii）此时无法得出级数收敛或发散的结论。因为这两方面的实例都是存在着的，例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。

（B） D'Alembert判别法——设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，并且$u_n\neq0$。若存在自然数$N$，当$n>N$时，

i）存在正数$q<1$，使$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

ii）$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明 （略）。

（B'） D'Alembert判别法的极限形式——设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，并且$u_n\neq0$。

i） 若$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

ii） 若$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\beta>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

iii） 若$\beta\leqslant1\leqslant\alpha$，则判别法失效。

证明 由上、下极限的性质，很容易把(B^*)归结为(B)的情况。详细的证明过程，由读者自行完成。

这里要特别指出的是，我们不能从 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha>1$ 得出级数发散的结论，也不能从 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\beta<1$ 得出级数收敛的结论（见例3）。

此外由于，

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

（见第二章习题19），故凡能用D'Alembert判别法判别的，用Cauchy判别法也一样能判别。反之，则不一定，所以Cauchy判别法比D'Alembert判别法适用范围广。然而在使用时后者却比前者方便。

例3 考察级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

此时

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[(2n-1)]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

故由Cauchy判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。但是，

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{3^k}{2^{k+1}}=+\infty>1$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2^k}{3^k}=0<1$$

故D'Alembert判别法失效。

如果我们能用Cauchy或D'Alembert判别法判别某个

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么这个级数的收敛速度就比某个公比$q<1$的几何级数的收敛速度更快；如果能用上述两种判别判断$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，那么这个级数的通项必不趋于零。收敛速度很慢或发散速度也很慢的级数，如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$（$p>1$与$p\leqslant 1$），是不能用Cauchy判别法或D'Alembert判别法判别的。若以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$为比较级数，我们可以得到另外的一种判别法，即Raabe判别法。但不论哪一种判别法，其适用范围都有一定的限制。当一种判别法失效时，就要找另一种更为"细致"的判别法去判别。

§3 任意项级数

3.1 级数的绝对收敛与条件收敛

级数的Cauchy收敛准则，虽然是充分必要的，而且适用于任何的级数，但它不是一个实用的判别法则。所以我们在§2研究了最简单的情况，即正项级数，并且与几何级数比较得到了Cauchy判别法与D'Alembert判别法。但是对任意项级数来说，比较定理不成立。为了能使正项级数的这些敛散性判别法也能适用于某些任意项级数（即正、负项均可无限次出现的一般级数），我们引入级数的绝对收敛的概念。

定义 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为绝对

收敛；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**条件收敛**。

显然，对于正项级数而言，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为同一个级数。所以收敛的正项级数总是绝对收敛的。

由定理 1 之推论 3 知道，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。当然反过来的情况是不成立的。但如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n$ 的发散，是由于 $|u_n|\nrightarrow 0$ 的原因，那么我们依然可以得出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散的结论。因为此时也有 $u_n\nrightarrow 0$。

鉴于上述的原因，我们就有可能利用正项级数的D'Alembert或Cauchy判别法来判断某些任意项级数的敛散性。

定理 4 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数。

i) 若 $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

ii) 若 $\beta=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证明

i) 若 $\alpha<1$，由正项级数的D'Alembert 判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

ii) 若$\beta>1$，则$|u_n|\nrightarrow 0$，从而$u_n\nrightarrow 0$。故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

对于Cauchy判别法，也有相应于本定理的结果。

例1 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$的敛散性。

解 此级数的敛散性与x的值有关。当$x>0$时，级数是正项级数；当$x<0$时，级数是非正项级数；而$x=0$时，级数是平凡的，因为此时每一项都等于零。

令$u_n=n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$。固定$x$，由D'Alembert判别法，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}|x|$$

故有$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|/e$，因此，当$|x|/e<1$，即$|x|<e$时，级数绝对收敛；当$|x|/e>1$，即$|x|>e$时，级数发散；当$|x|=e$时，判别法失效。但由于$\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!$，故当$|x|=e$时，有

$$|u_n|=n!\left(\frac{e}{n}\right)^n>\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n=1\nrightarrow 0$$

故$|x|=e$时级数发散。

综上所述，级数当$|x|<e$时收敛（绝对），当$|x|\geqslant e$时发散。

3.2 Abel变换

我们来考察形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$的任意项级数。

首先，将此级数的部分和$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$作一变形。为此，记

$$A_0 = 0, \quad A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \geqslant 1)$$

于是有

$$a_k = A_k - A_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \qquad (1)\end{aligned}$$

公式（1）称为$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$的Abel变换，它与积分的分部积分公式

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

$$= g(x) F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) dg(x) \qquad (2)$$

很类似。（1）中的A_k相当于（2）的$F(x)$，而$(b_{k+1} - b_k)$相当于$dg(x)$。

公式（1）将级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的部分和序列$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$分解成两个序列$\{A_n b_n\}$和$\left\{-\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)\right\}$之和，所以如果能给出这两个序列收敛的条件，那么也就相

当于给出了使 $\{S_n\}$ 收敛的条件。下面介绍的Dirichlet判别法和Abel判别法就是由此出发而获得的关于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛的判别法。

3.3 Dirichlet判别法与Abel判别法

定理5（Dirichlet） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之部分和 A_n 有界，序列 $\{b_n\}$ 为单调并趋于零，则级数 $\sum_{n=1} a_n b_n$ 收敛。

证明 令 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n (n \geqslant 1)$，$A_0 = 0$
由定理条件，存在正数 M，使对一切 n，有 $|A_n| \leqslant M$，从而 $A_n b_n \to 0$，$(n \to +\infty)$。

下面证明另一个序列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k)\right\}$ 的收敛性。为确定计，假定 $\{b_n\}$ 为单调减少地趋于零。于是有

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leqslant M(b_k - b_{k+1})$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})$$

$$= \lim_{n \to +\infty}(b_1 - b_{n+1}) = b_1$$

所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ 绝对收敛。亦即序列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)\right\}$ 收敛。因此，由Abel变换（1），知序列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right\}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

众所周知的Leibniz交错级数收敛定理，可作为本定理的一个直接推论。

定理 6（Abel） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 单调收敛（不必要求趋于零），则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

证明 由条件，知Abel变换式（1）中的序列 $\{A_n b_n\}$ 收敛。而序列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1}-b_k)\right\}$ 收敛性的证明，与定理 5 的证明相同。故 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right\}_{n=1,2,\cdots}$ 收敛。按定义，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

例 1 由于

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x$$

故当 $x\neq 2p\pi$（$p\in \mathbf{Z}$）时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant 1\bigg/\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

$\left(\text{同理可证，}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant 1\bigg/\left|\sin\frac{x}{2}\right|,\quad x\neq 2p\pi\right)$。

而当 $x=2p\pi$ 时，$\sin kx=0$。故

i) 对一切 x，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 收敛（Dirichlet 判别法）。

ii) 对一切 x，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$ 收敛 $\left(\text{易证序列 } b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\bigg/ n \text{ 单调减少地趋于零}\right)$

一般而言，如果 $\{b_n\}$ 单调减少地趋于零，则级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 对任何 x 收敛；而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ 只能当 $x \neq 2k\pi$ 时收敛。

Abel判别法实际上是Dirichlet判别法的一个推论。事实上，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，序列 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 便有界；其次若令 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - b) = 0$，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$，由Dirichlet判别法，此级数收敛。然而由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故级数。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

亦收敛。

§4 绝对收敛级数的性质

条件收敛的级数与绝对收敛的级数之间，究竟存在着哪些本质的差别呢？我们可以简单地说，绝对收敛的级数，从某种意义上说，它保持了有限和的某种特性，而条件收敛的级数，则失去了这种特性。我们将从项的可交换性与级数相乘时项的可分配性这两方面来阐述这个特性。

4.1 绝对收敛级数关于项的可交换性

我们知道，对于有限项的和，在求和的过程中与相加的次序无关（即具有项的可交换性）。对于级数的和来说，它从有限项变为无限项，是否还保持这个特性呢？换句话说，如果把级数的项，次序打乱，重新构序，会不会改变级数的收敛性与和数呢？我们说，在一般情况下，和数将会改变。

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$。这是一个收敛但非绝对收敛的级数，而且有和为ln 2，若令

$$A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \quad (1)$$

则

$$\frac{1}{2}A=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}-\cdots \quad (2)$$

将(1)、(2)对应项相加，得

$$\frac{3}{2}A=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\cdots \quad (3)$$

(3)是(1)的重排（或称是(1)的一个更序级数），然而它们有不同的和。

对于绝对收敛级数，情况就不同了。它们具有项的可交换性。我们证明下面的定理。

定理7 绝对收敛的级数具有项的可交换性。

证明

i) 先假定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，并设它有和为S，任意交换它的项，得到一个新的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，我们证明$S=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$。

为此，设$v_k=u_{n_k}$，其中$(k_1, k_2, \cdots k_n, \cdots)$是$(1, 2, \cdots, n, \cdots)$的某个置换。固定$n$，考察$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和

$$S'_n=v_1+v_2+\cdots+v_n=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_n}$$

令$k=\max\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$，则有

$$S'_n \leqslant S_k \leqslant S$$

故单调增加数列$\{S'_n\}$有界，从而收敛。按定义，级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛。令其和为S'，显然，$S' \leqslant S$。另一方面，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也可以看成是级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的一个更序级数。因此按刚才证明，亦有$S \leqslant S'$，从而有$S = S'$。

ii）现在假定$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数，但按定理假定，级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛。

令

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} \quad 及 \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$都是正项级数，并且$v_n \leqslant |u_n|$，$w_n \leqslant |u_n|$，所以由正项级数的比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$都收敛$\Big($实际上，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的一切正项所成的级数，而$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的一切负项变号后所组成的级数$\Big)$，因为$u_n = v_n - w_n$，故由级数的运算性质，知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$亦收敛（比较定理1

的推论2）。

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$的任意一个更序级数。于是$u_n' = v_n' - w_n'$，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$是正项收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的更序级数，级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$是正项收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$的更序级数，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} v'_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v'_n - \sum_{n=1}^{\infty} w'_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n' - w_n')$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$$

证毕

顺便指出，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是条件收敛的，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$都必须是发散的。

最后，我们还要介绍有关条件收敛级数的一个很有趣的结果，即对任何一个条件收敛级数，我们总可以把它的次序打乱重排，使经过更序的这个级数收敛到任何事先指定的实数S或定号的无穷大。

我们首先对S是有限的情况来证明。设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是条件收敛级数。$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$的定义如前。按级数的性质，它们

都是发散的。即有 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = +\infty$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = +\infty$，但由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的，所以 $v_n \to 0$，$w_n \to 0$（$n \to +\infty$）。

首先，从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中，按次取出前 k_1 项，使这 k_1 项之和刚刚超过 S，换句话说，选取 k_1，使

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{k_1} > S \quad 而$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{k_1 - 1} \leqslant S$$

接下去，从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 中按次取出前 m_1 项，使前面取出的 k_1 项之和与这 m_1 项之和之差刚刚小于 S，换句话说，选取 m_1 使

$$(v_1 + v_2 + \cdots + v_{k_1}) - (w_1 + w_2 + \cdots + w_{m_1}) < S$$

$$(v_1 + v_2 + \cdots + v_{k_1}) - (w_1 + w_2 + \cdots + w_{m_1 - 1}) \geqslant S$$

此后，重复地按上方式，加上 $\sum v_n$ 的一些项然后减去 $\sum w_n$ 的项，使加上 v_i 的项之后，其总和刚刚超过 S，而减去 w_i 的项之后，其总和刚刚小于 S。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 均发散，所以以上每一步，都是可行的。从而得到级数

$$\begin{aligned}&(v_1 + v_2 + \cdots + v_{k_1}) - (w_1 + \cdots + w_{m_1}) + \cdots \\ &+ (v_{k_{i-1}+1} + \cdots + v_{k_i}) - (w_{m_{i-1}+1} + \cdots \\ &+ w_{m_i}) + \cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

显然级数(1)的部分和与S的偏差不超过v_{k_i}或w_{m_i}，从而是趋于零的。所以级数(1)收敛。这个级数去掉括号，便是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的一个更序级数。因为每个括号内的项都同号，所以去括号后仍收敛(见本章习题3)，并且与级数(1)有相同的和。

其次，设S为定号无穷大。为确定计，假设$S=+\infty$，这时，可事先选取一个单调增递且发散到$+\infty$的正数序列$\{A_n\}$。然后，从$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$中依次取出前k_1项，使

$$(v_1+v_2+\cdots+v_{k_1})-w_1>A_1$$

接下去，取$k_2>k_1$，并使

$$(v_1+v_2+\cdots+v_{k_1})-w_1+(v_{k_1+1}+\cdots+v_{k_2})-w_2>A_2$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty} v_n=+\infty$，所以上述要求总可以满足。一般地，可取$k_m>k_{m-1}$，使

$$(v_1+v_2+\cdots+v_{k_1})-w_1+(v_{k_1+1}+\cdots+v_{k_2})-w_2+\cdots+\cdots+(v_{k_{m-1}+1}+\cdots+v_{k_m})-w_m>A_m$$

如此无限地重复上述过程，便可得到$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的一个发散到$+\infty$的更序级数。

这个结果是属于Riemann的。通常称为条件收敛级数的Riemann重排定理。

4.2 级数的乘法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个收敛级数。我们已经知道，两个收敛级数可以相加，而且我们曾把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 定义为这两个级数之和，并且进一步证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，我们也定义了级数与数的乘法，并且证明了 $C \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$。

现在我们来定义两个级数的乘法。仿照两个有限项和相乘的法则，我们考察这两个级数的项之所有可能的两两相乘之积 $u_i v_j$（i，j＝1，2，…），并把它们写成如下无穷矩阵形式

$$
\begin{array}{llllll}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots\cdots & u_1v_k & \cdots\cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots\cdots & u_2v_k & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_iv_1 & u_iv_2 & u_iv_3 & \cdots\cdots & u_iv_k & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \qquad (1)
$$

如何来作（1）的各项之和？实现这一求和的手段当然是多种多样的。我们可以随意地把这些项与自然数集 N 建立起一个一一对应的关系，然后把它们按自然数从小到大的次序

按次相加。在4.1中，我们已经阐明,任意一个级数是不一定具有项的交换性的。所以这样求出来的和，就可能会各种各样。究竟$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$要满足怎样的性质，才能使无穷矩阵(1)的元素可以按随心所欲的次序求和而和数不变？下面的定理回答了这个问题。

定理 8(Cauchy) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都绝对收敛，并设它们的和分别为$U$与$V$，则它们各项两两之积$u_i v_j$($i,j=1，2，\cdots$)按照任何方式排列所构成的级数也绝对收敛，并且有和为$U\cdot V$。

证明

i) 设w_1，w_2，…，w_n，…是(1)中元素的一种随意排列，并设$w_k=u_{l_k} v_{m_k}$，考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|w_n|$，并设$W_n$是它的部分和，即

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}|w_k|=\sum_{k=1}^{n}|v_{l_k} v_{m_k}|$$

并令

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}|u_k|, \qquad \overline{V}_n=\sum_{k=1}^{n}|v_k|$$

由假设，存在常数K，使对一切n，有

$$U_n\leqslant K \qquad 及 \quad {}_n\leqslant K$$

置

$$\lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{l_k, m_k\}$$

显然

$$W_n\leqslant(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_\lambda|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_\lambda|)=U_\lambda\cdot V_\lambda\leqslant K^2$$

故级数$\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|$收敛。从而$\sum_{k=1}^{\infty}w_k$绝对收敛。

因此推出，（1）按任何次序构和$\sum_{n=1}^{\infty}w_n'$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}w_n'\text{是}\right.$ $\left.\sum_{n=1}^{\infty}w_n\text{的一个更序级数}\right)$也绝对收敛，并且有同一个和。

ii） 现在证明（1）按任何次序构成的和等于$U \cdot V$。

既然（1）的构和与次序无关，我们不妨考察一种特殊的和

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 \\ + u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 \\ + u_3v_1 + \cdots + u_1v_k + u_2v_k + \cdots \\ + u_kv_1 + \cdots \qquad (2)\end{aligned}$$

为了计算$\sum b_n$，我们按"正方形"的方法（见表1）对$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$适当添加一些括号，得到级数。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}c_n = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) \\ + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 \\ + u_3v_1) + \cdots + (u_1v_k + u_2v_k + \cdots \\ + u_kv_1) + \cdots\end{aligned}$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛，并且与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$有相同的和。今分别用C_n、U_n与V_n代表级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和，则有$C_n = U_n \cdot V_n$，从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty} U_n \cdot \lim_{n\to+\infty} V_n = U \cdot V$$

换言之，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = U \cdot V$$

同样，(1)按其它任意方式构成的和也为$U \cdot V$

1	2	3	……	k	……
u_1v_1	u_1v_2	u_1v_3	……	u_1v_k	……
u_2v_1	u_2v_2	u_2v_3	……	u_2v_k	……
u_3v_1	u_3v_2	u_3v_3	……	u_3v_k	……
……	……	……	……		……
u_kv_1	u_kv_2	u_kv_3		u_kv_k	……
……	……	……	……	……	……

表 1

在实现(1)的和中，除了上面讲到的“正方形”法外，通常还有一种“对角线”法的求和。它是在(1)中先作出各条对角线上元素之和(见表2)，并把第n条对角线上的和记为$c_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}$，然后考察级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1} = u_1v_1 + (u_1v_2$$

$$+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_k+u_2v_{k-1}+\cdots$$
$$+u_kv_1)+\cdots$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的Cauchy乘积。

$$\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_k & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_k & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & & & & \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_k & \cdots \\
\swarrow & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_kv_1 & u_kv_2 & u_kv_3 & \cdots & u_kv_k & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

表 2

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 非绝对收敛，那么Cauchy定理就不成立。这从下面的例子可以看出。

例 1　考察条件收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+$$
$$(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

然后考察它自身相乘的Cauchy乘积。此时

$$c_n=\sum_{k=1}^{n} u_k u_{n-k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{(n-k+1)-1}}{\sqrt{n-k+1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}$$

由于$1\leqslant k\leqslant n$，所以$k(n-k+1)\leqslant n^2$，故上述右边和式之每一项均大于$\frac{1}{n}$，从而$|c_n|\geqslant 1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散。

然而对Cauchy乘积有如下定理。

定理9（Mertens） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，并且两者至少有一为绝对收敛，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k v_{n-k+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)=U\cdot V$$

证明 假定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k,\quad U_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\quad V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$$

以及令

$$V_n=V-\alpha_n$$

于是有$\alpha_n\to 0$（$n\to\infty$）。欲证$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=U\cdot V$

显然

$$\begin{aligned}S_n&=u_1V_n+u_2V_{n-1}+\cdots+u_{n-1}V_2+u_nV_1\\&=u_1(V-\alpha_n)+u_2(V-\alpha_{n-1})+\cdots+\\&\quad u_{n-1}(V-\alpha_2)+u_n(V-\alpha_1)\\&=U_nV-(u_1\alpha_n+u_2\alpha_{n-1}+\cdots+u_n\alpha_1)\\&=U_nV-\beta_n\end{aligned}$$

其中$\beta_n=u_1\alpha_n+u_2\alpha_{n-1}+\cdots+u_n\alpha_1$，由于$U_nV\to UV$，故只须证明$\beta_n\to 0$（$n\to\infty$）。

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，故可设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=U$，因为$\alpha_n\to 0$，故对任给意定的$\varepsilon>0$，存在$N_1$，当$n>N_1$时，有$|\alpha_n|<\varepsilon/2\overline{U}$。

于是

$$
\begin{aligned}
|\beta_n| &\leqslant |\alpha_1u_n+\alpha_2u_{n-1}+\cdots+\alpha_{N_1}u_{n-N_1+1}| \\
&\quad +|\alpha_{N_1+1}u_{n-N_1}+\cdots+\alpha_nu_1| \\
&\leqslant (|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|)\max(|u_n|,\cdots, \\
&\quad +|u_{n-N_1+1}|)+\max(|\alpha_{N_1+1}|,\cdots, \\
&\quad |\alpha_n|)\cdot(|u_1|+\cdots+|u_{n-N_1})\\
&\leqslant (|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|)\max(|u_n|,\cdots, \\
&\quad |u_{n-N_1+1}|)+\varepsilon/2U\cdot U \\
&= (|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|)\max(|u_n|,\cdots, \\
&\quad |u_{n-N_1+1}|)+\varepsilon/2
\end{aligned}
$$

固定N_1，又存在N_2，使$n-N_1+1>N_2$，且$N_2>N_1$时，有

$$|u_n|<\frac{\varepsilon}{2(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N_1}|)}$$

故当$n\geqslant N_2+N_1-1$时，有

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

证毕。

§ 5　函数序列及其一致收敛性

5.1　点态收敛与一致收敛

本章一开始，我们研究了数列与常数项级数。这一节与下一节，我们要以数列和数项级数为基础，研究函数序列与函数项级数的性质。

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在某个实数子集 E 上的、以 x 为变量的函数序列。固定 x_0，这个序列便成为普通数列。因此，$\{f_n(x)\}$ 对于 E 中的某些点可能收敛，而对另一些点可能发散。

如果对 E 的每一个点 x，$\{f_n(x)\}$ 都收敛，并记它的极限为 $f(x)$，显然这是定义在 E 上的一个函数。这时我们就记成

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x),\quad x\in E$$

并称 $f(x)$ 是函数序列 $\{f_n\}$ 的**极限函数**，或者说，$\{f_n\}$ 在 E 上**点态收敛**到 f。

但是，如果我们把函数序列的收敛问题仅仅停留在点态的收敛上，事物就不会前进了，因为我们用以前学过的知识，完全可以解决这一问题。然而很多有趣的问题却随之而生。例如，如果 $\{f_n\}$ 的每一个函数，都具有某种性质，诸如连续性，可微性，可积性等，那么在什么条件下才能使极限函数 f 也“继承”这种性质，并且可以与极限的运算交换次序呢？举个例来说，如果 $f_n(x)\to f(x)$，并且对某个 $x_0\in E$，$f_n(x)$ 都在此点连续，亦即如果有 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=f_n(x_0)$ $(n=1,2,\cdots)$，要问什么时候 $f(x)$ 在 x_0 也连续？

也就是说，何时亦有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$呢？要是极限函数 $f(x)$具有这个性质，那么便有等式

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

这样一来，运算$\lim\limits_{x\to x_0}$与运算$\lim\limits_{n\to+\infty}$的次序便可交换。这对于研究问题或进行计算无疑均会带来莫大的益处。

再譬如，如果$f_n(x)\to f(x)$ $(x\in E)$，并假定对每一个n，$f_n(x)$均可导或均可积，是否必有

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=f'(x) \qquad \text{或者} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f$$

亦即是否必有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)=\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]$$

或者必有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

成立呢？

当然，一般而言上述结论都是不能成立的。这一点可以从下面的例子看出。

例1． 在〔0，1〕上考察函数序列$f_n(x)=x^n$（$n=1, 2, \cdots$）。

有

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\neq 1\end{cases}$$

显然其中每一个函数$f_n(x)=x^n$在〔0，1〕上都是连续的，但是极限函数$f(x)$却在$x=1$不连续。亦即有

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1^-} f_n(x)$$

例 2　设$f_n(x)=n^2x(1-x)^n$，$x\in[0,1]$，由于对每一个$x\in[0,1]$，有

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0=f(x)$$

故得

$$\int_0^1 f=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx=0$$

然而，

$$\int_0^1 f_n=n^2\int_0^1 x(1-x)^n dx= n^2\int_0^1(1-t)t^n dt$$

$$=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n+2}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\longrightarrow 1$$

从而有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n=1\neq 0=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$$

例 3　设$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(n=1,2\cdots,x\in\mathbf{R})$于是对每一个$x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$$

故$f'(x)=0$。

另一方面，$f_n'(x)=\left(\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right)'=\sqrt{n}\cos nx$，因而对每一个实数$x$，$f_n'(x)$都不存在极限（见图22），从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)\neq\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

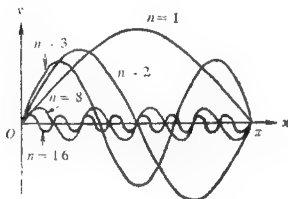

图 22

由此可见，欲使上述出现的运算具有交换性，必须对函数序列有比点态收敛更强的要求。为此我们引进函数序列一致收敛的概念。

定义 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在某实数子集 E 上的函数序列，并且点态收敛到 $f(x)$。如果

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0$$

则称序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛到 f。

记号 $\sup\limits_{x\in E}|f(x)-g(x)|$ 有时也记成 $\|f-g\|$。它表示定义在 E 上的函数（有界函数或连续函数）所成的空间内，元素 f 与 g 之间的"距离"。而记号 $\|\cdot\|$ 则称为"范数"，它与实数的绝对值有相仿的意义和性质。

5.2 与一致收敛定义等价的其它条件

定理10 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，当且仅当对任意给出的 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，对一切的 $x\in E$，都有不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立。

证明 设$\{f_n\}$一致收敛，则对任给的$\varepsilon>0$，存在N，当$n\geqslant N$时，有

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

从而对一切的$x\in E$，当$n\geqslant N$时，有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

反之，设定理条件满足。即对任意的$\varepsilon>0$，都存在N，当$n\geqslant N$时，对一切的$x\in E$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

于是有

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,\quad(n\geqslant N)$$

此即$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$。

定理中的条件，有时也用来作为函数序列一致收敛的定义。其实，由熟知的Cauchy收敛原理，我们还可以给出一致收敛的另一种等价定义。

定理11（Cauchy） $\{f_n(x)\}$在E上一致收敛，当且仅当对任意的$\varepsilon>0$，存在N，当$n\geqslant N$时，不等式

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对一切正整数p及所有的$x\in E$成立。

证明 设$\{f_n\}$在E上一致收敛，并设其极限函数为$f(x)$，于是对给定的$\varepsilon>0$，存在N，当$n\geqslant N$时，对一切$x\in E$，及一切正整数p，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2\ \text{及}\ |f_{n+p}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$$

故 $$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

反之，若任给 $\varepsilon>0$，存在N，当$n\geqslant N$时，不论 $x\in E$ 如何，也不论p是怎样的正整数，恒有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

于是对每一个$x\in E$，$\{f_n(x)\}$都是 Cauchy 数列。所以 $\{f_n(x)\}$点态收敛。不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。

在上述不等式中，固定n，令$p\to+\infty$，则得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (n\geqslant N,\ x\in E)$$

从而得

$$\sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

由 ε 的任意性，即知$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛到$f(x)$。

例 4 考察函数序列 $f_n(x)=x^n{}_{(n=1,2,\cdots)}$ 在$[0,1]$上的一致收敛性。

解 由例 1，知f_n点态收敛于

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}$$

显然有$\|f_n-f\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$。所以$\{x^n\}$在$[0,1]$上不一致收敛。$\left(\text{或取 } x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\text{，则由 } |f_n(x_n)-f(x_n)|\right.$ $\left.=f_n(x_n)=1/2\nrightarrow 0 \text{ 可知}\{f_n(x)\}\text{不一致收敛到 } f(x)\right)$

然而$\{x^n\}$在任何$[0,\delta]$ $(0<\delta<1)$的区间上是一致收敛的。证明由读者自行完成。

例 5 研究函数序列

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad (n=1,\ 2\cdots,\ x\in\mathbf{R})$$

的一致收敛性。

解 对每一个$x\in\mathbf{R}$，$f_n(x)$点态收敛到$f(x)\equiv 0$，并且

$$\|f_n-f\|=\sup_{x\in\mathbf{R}}\left\{\frac{|x|}{1+n^2x^2}\right\}$$

$$=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\Bigg|_{|x|=\frac{1}{n}}=\frac{1}{2n}\to 0$$

$$(n\to+\infty)$$

所以$\{f_n\}$一致收敛于$f\equiv 0$。

5.3 一致收敛与连续性

定理12 设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$，如果对每一个n，$f_n(x)$都在$x_0\in[a,b]$连续，则$f(x)$亦在x_0连续。

证明 由$\{f_n\}$的一致收敛性，故对任给的$\varepsilon>0$，存在N，使对一切的$x\in[a,b]$，有

$$|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon/3$$

因为$f_N(x)$在x_0连续，所以对上述的ε，存在x_0的一个δ－邻域$O(x_0;\ \delta)$，使对一切的$x\in O(x_0;\delta)\cap[a,b]$有

$$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\varepsilon/3$$

故当$x\in O(x_0;\ \delta)\cap[a,b]$时，有不等式

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|$$
$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

按定义，$f(x)$在x_0连续，并且有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x_0)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)$$

5.4 一致收敛序列的积分

定理13 设 $\{f_n(x)\}$ 为有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数序列，并且一致收敛到 $f(x)$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_c^x f_n(t)dt=\int_c^x \lim_{n\to+\infty}f_n(t)dt=\int_c^x f(t)dt$$

$$(c,\ x\in[a, b])$$

证明 由定理12，知 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数，所以积分 $\int_c^x f(t)dt$ 存在；又由 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $t\in[a, b]$，有

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon/(b-a)$$

因而当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\int_c^x f_n(t)dt-\int_c^x f(t)dt\right|$$

$$\leqslant\left|\int_c^x |f_n(t)-f(t)|\ dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(a-b)=\varepsilon$$

这个不等式不仅证明了 $\int_c^x f_n(t)dt$ 收敛到 $\int_c^x f(t)dt$，而且还证明了收敛是一致的。

定理13说明，对于一致收敛函数列的积分来说，极限与积分这两种运算的次序可以交换。但一致收敛只能是实现这一点的充分条件而不是必要条件。例如 $f_n(x)=x^n$ 在 $[0, 1]$ 上点态收敛到

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

我们已经证明过，收敛不是一致的，但仍然有

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$$

5.5 一致收敛序列的微分

定理14 设 $\{f_n(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上有定义并且有连续导数的函数序列。如果在 $[a, b]$ 上，$f_n(x)$ 点态收敛到 $f(x)$，$f_n'(x)$ 一致收敛到 $g(x)$，则

i) $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$；

ii) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微；

iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x) = f'(x)$

证明 因为 $\{f_n'(x)\}$ 一致收敛到 $g(x)$，并且对每一个 n，$f_n(x)$ 连续，故由定理12，知 $g \in C_{[a,b]}$。

又由定理13，及本定理给出的条件，有

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x \lim_{n \to +\infty} f_n'(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^x f_n'(t)dt$$

$$= \lim_{n \to +\infty} [f_n(x) - f_n(a)]$$

$$= f(x) - f(a) \qquad (*)$$

上式左端是 x 的可微函数，所以 $f(x)$ 亦为 x 的可微函数，此即ii)。

式(*)两端对 x 求导，得 $g(x) = f'(x)$，此即iii)。

由于

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \qquad (**)$$

然而从定理13的证明过程看出，$\int_a^x f_n'(t)dt$ 不仅收敛到 $\int_a^x g(t)dt = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$，而且收敛是一致的。所

以由(* *)推知$f_n(x)$一致收敛到$f(x)$，此即i)。　证毕。

§ 6　函数项级数及其一致收敛性

6.1　函数项级数及其收敛的定义

定义 1　设$\{u_n(x)\}$ $(n\geqslant 1)$是定义在某实数子集E上的实函数列，我们相应地构造另一函数序列

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$
$$(n=1,\ 2\cdots)$$

称函数序列的偶($\{u_n(x)\}$，$\{s_n(x)\}$)为**函数项级数**。其中每一个$u_n(x)$为此级数的项，而$\{s_n(x)\}$则称为此级数的**部分和序列**。级数($\{u_n(x)\}$，$\{s_n(x)\}$)也通常简记成

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

定义 2　称函数项级数(1)在E上收敛(相应地，一致收敛)于$f(x)$，当且仅当它的部分和序列$\{s_n(x)\}$在E上收敛(相应地，一致收敛)于$f(x)$。

6.2　一致收敛级数的性质

从以上定义可以看出，函数项级数的收敛(或一致收敛)与否，完全等价于它的部分和序列的收敛(一致收敛)与否。因此，由定理12、定理13以及定理14，我们可以相应地得到有关函数项级数的定理如下。

定理12′(和函数的连续性)　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，并且对每一个$n$，$u_n(x)$在$x_0\in[a,\ b]$连续，则它的和函数$f(x)$也在$x_0$连续。

Cauchy在《Cours d'Analyse》一书中，首先提出了与此类似的命题，但他没有强调一致收敛的要求。所以他的结论是不正确的。尽管Cauchy在后期已经发现了自己的这一错误，但从这里可以历史地看出，这位伟大的分析大师，在当时还没有认识到一个以连续函数为项的级数其和竟可以为不连续，后来，Abel指出了Cauchy的这一疏忽，并且给出了一个反例。事实上，级数

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

的每一项都是连续的，但它的和函数却在 $x=(2k+1)\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$ 处不连续（读者容易验证，此级数便是在 $-\pi<x<\pi$ 上取值为 $\frac{x}{2}$ 并以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 之Fourier展开式）。

定理13′（逐项积分）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，并且对每一个 n，$u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则

$$\int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt,$$

$$(c,\ x\in [a,\ b])$$

如果把定理中关于 $u_n(x)$ 为连续的条件减弱为 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，结论仍可保持（见第六章习题8）。但如果去掉一致收敛的假定，则结论就会失真。Cauchy在叙述这个定理时，像上一定理一样，重蹈了忽视一致收敛的错误。他在《Résumé des Leçons》中说，如果 $u_n(x)$ 都连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则级数可以逐项积分。然而我们要知道，

纵使存在着非一致收敛的级数而可逐项积分的事例，但要保证逐项积分的可行性，一致收敛的条件则是不能去掉的。下面是一个以可积函数为项的非一致收敛级数，其和函数竟然是不可积分的例子。

例1 设r_1，r_2，…，r_n，…是〔0，1〕内有理数的全体。令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1，当x=r_n时\\0，当x\neq r_n时\end{cases}\quad(x\in[0,1])$$

显然，每一个$\varphi_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）均(R)可积。但$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$却是著名的Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases}1，&x为有理数\\0，&x为无理数\end{cases}$$

，而$D(x)$是不可积的（见第六章习题1）。

定理14′（逐项求导） 设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在〔$a$，$b$〕上收敛，并且对每一个$n$，$u_n(x)$有连续导数，此外，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在〔$a$，$b$〕上一致收敛。则有

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

6.3 函数项级数的一致收敛判别法

定理15（Cauchy） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$是实数子集$E$上的函数项级数。它在$E$上一致收敛的充分必要条件是，任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n\geqslant N$时，不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

对每一个自然数p及每一个$x\in E$成立。

这是定理11的直接结果。

推论 1 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$为实数子集$E$上的两个函数项级数，并且在$E$上满足

$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$$

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$E$上一致收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$E$上绝对且一致收敛。

证明 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$E$上一致收敛，所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n\geqslant N$时，不等式$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)<\varepsilon$对一切自然数$p$及一切$x\in E$成立。从而当$n\geqslant N$时不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|$$

$$<\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)<\varepsilon$$

对一切自然p及一切$x\in E$成立。所以$\sum\limits_{n=1} u_n(x)$在E上绝对并且一致收敛。

推论 2 设$\{M_n\}$是一个非负实数序列，并且对每一个$x\in E$，满足$|u_n(x)|\leqslant M_n$，如果常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$E$上绝对且一致收敛。

推论2是推论1的特殊情形，即$v_n(x)=M_n$的情形，

但它在判别函数项级数一致收敛时却显得非常简单和实用。这个判别法称为Weierstrass判别法，其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**优级数**，所以这个判别法也叫做 M－判别法，这里 M 是Majorant Series的第一个字母。

例 2　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $|x|<\infty$ 内的一致收敛性。

解　当 $x \to 0$ 时，$\operatorname{arctg} x \sim x$，而由 $a^2+b^2 \geqslant 2|a \cdot b|$

知　$\frac{2|x|}{x^2+n^3} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$，故

$$|u_n(x)| = \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}\right| \leqslant K \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

（K为常数）

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ 收敛，故所考察的级数在R内一致收敛。

例 3　若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在R内一致收敛。

关于形如 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) \beta_k(x)$ 的级数的一致收敛判别法问题，我们也有类似于常数项级数 $\sum_{k=1} a_k b_k$ 的Dirichlet判别法和Abel判别法。当时我们的想法是通过Abel变换，把 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 的部分和序列 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 分解为两个序列之和，然后给出条件，使这两个序列同时收敛。

很自然，现在我们也一定会这样考虑：从Abel变换

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\beta_k(x)$$

$$=\alpha_n(x)B_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}B_k(x)[\alpha_{k+1}(x)-\alpha_k(x)]\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\left(\text{其中 } B_k(x)=\sum_{j=1}^{k}\beta_j(x)\right)$，或公式（见本章习题4）

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\beta_k(x)=B(x)\alpha_1(x)$$

$$+(B_n(x)-B(x))\alpha_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}[B_k(x)-B(x)][\alpha_{k+1}(x)-\alpha_k(x)]\cdots\cdots(2)$$

（其中假定$B(x)$是$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(x)$的极限函数）出发，把$\{S_n(x)\}$分解为两个函数序列之和，然后分别给出条件使这两个函数序列一致收敛。

定理16（Dirichlet） 若

1） $B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(x)$在$E$上一致有界，设$|B_n(x)|\leqslant B$，$(n=1,2\cdots,\ x\in E)$，

2） $\{\alpha_k(x)\}$在E上一致收敛于零，

3） 对每一固定的x，数列$\{\alpha_n(x)\}$单调，

则$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)\beta_k(x)$在$E$上一致收敛。

证明 由定理条件，函数序列$\{B_n(x)\alpha_n(x)\}$在E上一致收敛于零（见本章习题21），由定理15推论1，函数序列$\left\{\sum_{k=1}^{n}B_k(x)[\alpha_{k+1}(x)-\alpha_k(x)]\right\}$在$E$上一致收

敛。所以由公式（1），函数序列$\{S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\beta_k(x)\}$在$E$上一致收敛。按定义，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)\beta_k(x)$在$E$上一致收敛。

定理17（Abel） 若

1）$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)$在$E$上一致收敛，

2）$\{\alpha_k(x)\}$在E上一致有界，设$|\alpha_k(x)|\leqslant A$，

$(k=1, 2, \cdots, x\in E)$

3）对每一固定的x，数列$\{\alpha_k(x)\}$单调，

则$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)\beta_k(x)$在$E$上一致收敛。

证明 由定理条件，公式（2）中函数序列$\{B(x)\alpha_1(x)+(B_n(x)-B(x))\alpha_n(x)\}$在$E$上一致收敛于$B(x)\alpha_1(x)$，由本章习题22，公式（2）中函数序列$\left\{\sum_{k=1}^{n-1}[\beta_k(x)-B(x)][\alpha_{k+1}(x)-\alpha_k(x)]\right\}$在$E$上一致收敛，所以函数序列$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\beta_k(x)$在$E$上一致收敛。按定义，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)\beta_k(x)$在$E$上一致收敛。

请读者注意，我们没有通过公式（1）导出Abel判别法，这是因为对函数序列来说，即使两个序列都是一致收敛的，但它们的乘积未必是一致收敛的（见本章习题24）。

例4 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在区间$[-\pi, -a]$及

$[a, \pi]$上一致收敛，其中$0<a<\pi$。

证明 在定理16中，视$\beta_n(x)=\sin nx$, $\alpha_n(x)=\frac{1}{n}$，并考虑到

$$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

及 $\quad |B_n(x)|\leqslant 1\Big/\sin\frac{a}{2}\quad (a\leqslant|x|\leqslant\pi)$，由Dirichlet判别法即证。

例5 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=R(>0)$收敛（这里$R$是所给幂级数的收敛半径，则级数在$[0, R]$上一致收敛。

证明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x)\alpha_n(x)$

其中$\beta_n(x)=a_nR^n$, $\alpha_n(x)=\left(\frac{x}{R}\right)^n$，而$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$是收敛的常数项级数，可以看成是$[0, R]$上关于$x$一致收敛的函数项级数。序列$\alpha_n(x)$对每一个$x\in[0, R]$为单调，并且在此区间上，$|\alpha_n(x)|\leqslant 1$。故由Abel判别法，推知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[0, R]$上一致收敛。此时和函数在$x=R$保持连续性，即有

$$\lim_{x\to R^-}f(x)=\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to R^-}(a_nx^n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=f(R)$$

例如 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，$|x|<1$。 级数在$x=1$收敛，故必有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

而且幂级数在〔0，1〕上一致收敛。

§7 幂级数

幂级数有很多优良而重要的性质，这些性质已为读者所熟知。然而在微积分教程中，囿于当时工具，这些性质多半未作证明。这里特予补证。

由于我们总可以通过变换$x-x_0=X$而使幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$变成$\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$的形状，所以下面我们均以$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$为例讨论之。

7.1 Abel定理与幂级数的收敛半径

定理18（Abel） 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$收敛，则对每一个满足$|x|<x_0$的$x$，此级数绝对收敛。

证明 由于$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$收敛，故对一切$n$，$a_nx_0^n$有界。设$|a_nx_0^n|<M$（$n=1,2\cdots$）。而

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant Mc^n$$

其中$c=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$。由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}Mc^n$收敛，所以由比较

判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛。

由定理可以推得，若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 发散，则对满足 $|x|>|x_0|$ 的 x，此幂级数亦发散。

任何一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，在 $x=0$ 总是收敛的。除掉这种平凡的情况之外，如果还存在异于零的 $\bar{x}$ 使级数收敛，那么这种 $|\bar{x}|$ 的全体构成实数的一个子集 $\{|\bar{x}|\}$。它或者囿于上，或者不囿于上。如果囿于上，设 $R=\sup\{|\bar{x}|\}$，则当 $|x|>R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；当 $|x|<R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛。这时 R 便称为幂级数的收敛半径，$(-R, R)$ 便称为幂级数的收敛区间。如果 $\{|\bar{x}|\}$ 不囿于上，此时幂级数对每一个 x 都收敛。故有收敛半径为 $+\infty$。

利用常数项级数的 Cauchy（或 D'Alembert）判别法，可以计算出幂级数的收敛半径。

定理19（Cauchy—Hadamard） 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为已知幂级数。令

$$\alpha=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

及

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}, & 若\ \alpha\neq 0,\ \alpha\neq+\infty\\ +\infty, & 若\ \alpha=0\\ 0, & 若\ \alpha=+\infty\end{cases}$$

则

i） 若$R\neq 0$，$R\neq +\infty$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$|x|<R$时绝对收敛，而当$|x|>R$时为发散。

ii） 若$R=0$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$除$x=0$外处处发散。

iii） 若$R=+\infty$，则对每一个实数x，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛。

证明 我们只就$R\neq 0$，$R\neq +\infty$这种情况证明，其余两种情况请读者自己证明。

置$c_n=a_n x^n$，x确定之后，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$便为常数项级数，而且有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=|x|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|/R$$

故由Cauchy判别法，当$|x|/R<1$，即$|x|<|R|$时，幂级数绝对收敛；当$|x|/R>1$，即$|x|>R$时，幂级数发散。

7.2 Abel定理的应用

一、级数的乘法定理

定理9告诉我们，两个收敛级数，如果其中一个是绝对收敛的，那么它们两者的乘积与它们的Cauchy乘积相等。下面我们证明关于级数相乘的另一个定理。

定理20（级数的乘法定理） 设$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$与$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$为两给定的级数，$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$是它们的Cauchy乘积。其中

$$c_n=\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 三者均收敛，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right)$$

证明 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，故由上节例5知道，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在〔0，1〕一致收敛。并由定理18，这三个幂级数还在〔0，1)内绝对收敛，故在〔0，1)内，可作乘法。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right)$$

$$= s_1(x) \cdot s_2(x)$$

由于它们在〔0，1〕上一致收敛，所以又有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= \left(\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right) \cdot \left(\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right)$$ 证毕。

二、Diophantus方程解的个数

Diophantus方程是一种整系数线性不定方程。在这里，我们不想对它作全面的探讨，我们只给出一个具体的线性不定方程的解法，说明如何应用幂级数的性质与级数的乘法来解此类问题。使读者起到触类旁通的作用。

例 求线性不定方程

$$x+2y=n$$

的非负整数解（x，y）的个数，其中n是一正整数。

解 由于在$|z|<1$内，有

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$$

为适用于本问题的求解起见，我们改写

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{x=0}^{\infty}z^x,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}=\sum_{y=0}^{\infty}z^{2y}$$

这两级数在$|z|<1$可以相乘。故有

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty}z^x\right)\cdot\left(\sum_{y=0}^{\infty}z^{2y}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}z^{x+2y}$$

令$x+2y=n$，并合并同类项，得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^x\right)\cdot\left(\sum_{y=0}^{\infty}z^{2y}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n \qquad (*)$$

我们看到，A_n正好是满足方程$x+2y=n$的非负整数解(x,y)的个数。另一方面，当$|z|<1$时，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^x\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{2y}\right)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z^2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{1+z}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1+2(n+1)}{4}z^n \qquad (**)$$

比较$(*)$，$(**)$，得

$$A_n=\frac{(-1)^n+1+2(n+1)}{4} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

7.3 幂级数的逐项微分与逐项积分

定理21 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有非零收敛半径R。当$|x|<R$时，令$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则

i）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内闭一致收敛（即任何含在$(-R, R)$内的闭区间$[\alpha, \beta]$上，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$一致收敛）于$f(x)$；

ii）在$|x|<R$内，f 连续、可微，并且可以逐项求导。即有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

iii）在$|x|<R$内，幂级数可以逐项求积。即有

$$\int_0^x \sum_{n=0} a_n t^n dt=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt$$

证明

i）设$[\alpha, \beta]\subset(-R+\varepsilon, R-\varepsilon)$。因而对每一个$x\in[\alpha, \beta]$，有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n(R-\varepsilon)^n| \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

而$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(R-\varepsilon)^n$绝对收敛（定理18）。故由$M$－判别法（定理15推论2）知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[\alpha, \beta]$一致收敛。

ii）容易验证，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n-1}$与幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有相同的收敛半经，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 内闭一致收敛。

设 x_0 为 $(-R, R)$ 内任意一点，故存在闭区间 $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ 而使 $x_0 \in [\alpha, \beta]$。由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，故由逐项求导定理（定理14′），有

$$f'(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x_0^{n-1}$$

由 x_0 的任意性，故 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $|x|<R$ 内每一点成立。

iii）证明可由定理13′直接推出。

推论 在定理的假设下，$f(x)$ 在 $|x|<R$ 内有任意阶导数，并且

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad (k=1, 2\cdots)$$

特别，如果约定 $f^{(0)}=f$，则得

$$f^{(k)}(0) = k!\ a_k \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

§6之例5说明了幂级数的一个很重要的性质。我们把它归纳为如下的一个定理，作为本章的结束。

定理22（Abel） 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有有限的非零收敛半径 R，并且在 $x=R$（当然也可以考虑 $x=-R$ 的情形）收敛，则级数在 $[0, R]$ 上一致收敛，而它的和函数，不仅在 $(-R, R)$ 内连续，而且在 $[-R, R]$ 连续。

习 题

1．考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

的敛散性。

2．设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，其中$u_n \geqslant 0$ ($n=1, 2, \cdots$)，若$\{u_n\}$趋于零，但不是单调地趋于零，此级数是否必收敛？请举例说明。

3．若级数的项加括号后所成的级数收敛，试问未加括号的原级数是否收敛？假定级数的项加括号后收敛，而同一括号的各项符号相同，证明去掉括号后的原级数一定也收敛并且两者有同一个和。

4．若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s b_1 + (s_n - s) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s)(b_{k+1} - b_k),$$

其中$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$。

5．设$\{n a_n\}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛。

6．若$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，证明

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

7. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，并且$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$，能否由此判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛？

$\left(\text{比较}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}\text{与}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n}\right)$

8. 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$对所有的实数$x$收敛，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$$

9. 设$|x|<1$，$|y|<1$，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

10. 利用幂级数的表示式证明

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

11. 已知函数序列

$$f_n:\ x\longmapsto\frac{2nx}{1+n^2x^2}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$x\in[0,\ 1]$$

求它的极限函数f，并判断$f_n(x)$在$[0,\ 1]$上是否一致收敛？

12. 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在R内一致收敛，但不绝对收

敛。

13．证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$在任何有界区间内一致收敛，但对每一个$x$，不绝对收敛。

14．证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$在〔0，2π〕上不一致收敛。

15．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，$S_n=a_0+a_1+\cdots-a_n$（$n=0$，1，2，…），证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$　（$|x|<\min\{R,1\}$）。

16．设p,q为两正数，证明

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}-\frac{1}{p+3q}+\cdots$$

17．已知

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2n}\right]\\ n-2n^2\left(x-\dfrac{1}{2n}\right), & x\in\left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{n}\right)\\ 0, & x\in\left(\dfrac{1}{n},1\right)\end{cases}$$

证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx$$

18．证明$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$连续。

（对任何正数δ，证明$f(x)$在〔δ，+∞〕连续）。

19．证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty, +\infty)$连续，并且有连续的导函数。

20．证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$在$(-\infty, +\infty)$一致收敛，但在任何区间内不能逐次求导。

21．若$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于零，$\{g_n(x)\}$在E上一致有界，则$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在R上一致收敛于零。

22．若序列$\{\beta_k(x)\}$在E上一致有界，序列$\{\alpha_k(x)\}$在E上一致收敛，并且对每一个$x\in E$，数列$\{\alpha_k(x)\}$是单调的，则函数序列$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(x)[\alpha_{k+1}(x)-\alpha_k(x)]$在$E$上一致收敛。

23．设函数列f_n在E上一致收敛到f，并且假定每一个f_n在E上是有界的，证明$\{f_n\}$在E上一致有界。

24．定义两个函数序列如下：

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad(x\in R;\ n=1, 2, 3, \cdots)$$

$$g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{若}x=0\text{或}x\text{为无理数，}\\[2ex] b+\dfrac{1}{n}, & \text{若}x=\dfrac{a}{b}\text{为有理数，其中}\\ & b>0, a, b\text{既约}\end{cases}$$

置$h_n(x)=f_n(x)g_n(x)$。

i) 证明$\{f_n\}$与$\{g_n\}$两者在每一个有界区间上一致收敛；

ii) 证明$\{h_n\}$在任何一个有界区间上不一致收敛。

25. 假设对E内每一个x，$g_{n+1}(x)\leqslant g_n(x)$（$n=1$，2，…），并且假定$\{g_n\}$在$E$上一致收敛于零，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g_n(x)$在$E$上一致收敛。

26. 设$\{a_n\}$是非负递减序列。如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$在R上一致收敛，证明$na_n\to 0$（$n\to+\infty$）（实际上条件还是充分的）。

27. 若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有非零收敛半径$R$，证明

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\leqslant R\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

28. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，并且两者至少有一个为绝对收敛，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n-k+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)$$

第四章　度量空间

我们所以能在实数域上研究极限以及其它与此有关的性质，完全是由于我们在实数域上定义了距离的缘故。但距离的概念并非R^1所独有。在很多集上，我们都可以引入距离而使之成为“度量空间”。度量空间是读者所熟悉的欧几里得空间的一个极为自然而相近的推广。

§1　Euclid空间

1.1　n维Euclid空间

设n为正整数，所有有序的n－实数组$X=(x_1, x_2, \cdots x_n)$的全体构成一集，称为n维空间，并记为R^n。

实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为X的坐标，R^n的元素$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$R^n$的一个点或向量。

R^n也可以看成是n个R^1的积集$R^1\times R^1\times\cdots\times R^1$（见第一章1.3）。

设$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是$R^n$的两个点，并且对每一个$i$（$1\leqslant i\leqslant n$），成立$a_i<b_i$，则集

$$S=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n): a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

便是R^n的一个子集，称为R^n的一个闭区间，并记为$[a, b]$，

显然

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

我们同样可以定义R^n内的开区间，以及半开、半闭区间，他们是集：

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{X = (x_1, \cdots, x_n): a_i < x_i < b_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{X = (x_1, \cdots, x_n): a_i \leqslant x_i < b_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{X = (x_1, \cdots, x_n): a_i < x_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$

这四种集合统称为n维区间。

我们可以在R^n内定义向量的加法以及实数与向量的乘法如下：

i） 加法：设$X = (x_1, \cdots, x_n)$与$Y = (y_1 \cdots, y_n)$为R^n的任意两个元素。定义

$Z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

为X与Y之和，并记 $Z = X + Y$。

ii） 数乘：设$X = (x_1 \cdots, x_n)$为R^n的任意一个元素，$\alpha \in R^1$。定义

$W = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$

为α与X的乘积，并记 $W = \alpha X$。

容易验证，R^n关于加法构成交换群，向量与数的乘法满足结合律，加法和乘法满足分配律。所以 R^n是一个线性空间（或向量空间）。

为了在R^n内引入"距离"与"角度"，我们还需在R^n内定义内积的概念。

设$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

为R^n的任意两个向量。称实数

$$\langle X, Y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

为X与Y的内积。内积$\langle X, Y\rangle$有时也简记成$X\cdot Y$。

显然，内积满足下列四个基本性质：

i）$\langle X, X\rangle\geqslant 0$，而等号当且仅当$X=(0,0,\cdots,0)$时成立。向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量，记作0，

ii）$\langle X, Y\rangle=\langle Y, X\rangle$，

iii）$\langle \alpha X+\beta Y, Z\rangle=\alpha\langle X, Z\rangle+\beta\langle Y, Z\rangle$，其中$\alpha$，$\beta\in R$。

iv）$\langle X, Y\rangle^2\leqslant\langle X, X\rangle\cdot\langle Y, Y\rangle$。

定义了内积的n维空间称为n维Euclid空间。

R^n内的向量X，Y，如果它们满足$\langle X, Y\rangle=0$，则谓X与Y是正交的；若$\langle X,X\rangle=1$，则谓X是标准的。R^n中的元素$e_1=(1, 0, \cdots, 0)$，$e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)$，…，$e_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$是彼此正交并且标准的，故称为R^n的一个标准正交基。标准正交基犹如通常空间的坐标系，它们对于处理与表达问题是非常方便的。当$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2\cdots$，$\bar{e}_n$是R^n的一个标准正交基时，R^n中的每一个向量$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$均可唯一地表示为它们的线性组合：

$$X=\langle X, \bar{e}_1\rangle\bar{e}_1+\langle X, \bar{e}_2\rangle\bar{e}_2+\cdots+\langle X, \bar{e}_n\rangle\bar{e}_n$$

称$x_1=\langle X, e_1\rangle$，$x_2=\langle X, \bar{e}_2\rangle$，…，$\bar{x}_n=\langle X, \bar{e}_n\rangle$为X关于此基的坐标或分量。

1.2 范数及其性质

定义 设X为n维Euclid空间R^n的任意一个向量，它的坐标为x_1，…，x_n。称数

$$|X| = \langle X, X\rangle^{\frac{1}{2}} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$$

为X的Euclid范数。

R^n中的范数是R^1的绝对值的推广。当$n=1$时，上述范数即为R^1的绝对值。所以范数$|\cdot|$也可以看成是n维向量X的"长度"，或原点0到X的"距离"。而数$|X-Y|$则可以看成是X与Y之间的距离，范数与绝对值有相仿的性质：

i） $|X|\geqslant 0$，而等号成立当且仅当$X=0$

ii） $|\alpha X| = |\alpha|\,|X|$，其中$\alpha\in R$

iii） $|\langle X, Y\rangle|\leqslant |X|\cdot|Y|$（Cauchy不等式）

iv） $|X+Y|\leqslant |X|+|Y|$（三角不等式）

证明　性质i），ii）可由范数的定义立即推出。

iii）的证明。

若$Y=0$，结论至为显然，若$Y\neq 0$，则不等式

$0\leqslant\langle X-CY, X-CY\rangle = |X|^2 - 2C\langle X, Y\rangle + C^2|Y|^2$

对任何实数C成立，特别对$C=\langle X, Y\rangle/|Y|^2$成立。将此值代入上述不等式，便可证明iii）。并且从证明过程中可以看出，欲使iii）中等号成立，当且仅当$X=CY$。

iv）的证明。

由定义，$|X+Y|^2=\langle X+Y, X+Y\rangle = |X|^2+2\langle X, Y\rangle + |Y|^2\leqslant |X|^2+2|X||Y|+|Y|^2 = (|X|+|Y|)^2$。两边开平方，即得三角不等式。

1.3　Hölder不等式和Минковский不等式

这里介绍两个重要不等式，即Hölder不等式和Минковский不等式。它们被广泛地应用在不同的数学研究中。

一、Hölder不等式

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$为两

个n-实数组，p，q为两个大于1的正数，满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（称这样的两个正实数为一对共轭指数）。则有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right\}^{1/q} \qquad (1)$$

证明 研究函数$\tau=t^{\alpha}$（$t>0$，$\alpha>0$）。取定正数ξ与η，得两块图形面积S_1与S_2（见图23），其中

$$S_1=\int_0^{\xi} t^{\alpha}dt=\xi^{\alpha+1}/\alpha+1$$

$$S_2=\int_0^{\eta}\tau^{1/\alpha}d\tau=\eta^{\frac{1}{\alpha}+1}\Big/\frac{1}{\alpha}+1$$

另一方面，显然有

$\xi\cdot\eta\leqslant S_1+S_2$（等号成立当且仅当$\eta=\xi^{\alpha}$）

令$\alpha+1=p$，$\frac{1}{\alpha}+1=q$，

则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。从而有

$$\xi\cdot\eta\leqslant\xi^p\Big/p+\eta^q\Big/q \qquad (*)$$

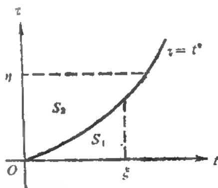

图 23

公式（*）对任何一对正实数ξ，η成立。今令

$$\xi=|x_i|\Big/\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p},$$

$$\eta=|y_i|\Big/\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^q\right)^{1/q}$$

并将它们代入（*），然后对i求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}.\qquad 证毕.$$

当$p=q=2$时，Hölder不等式就成为著名的Cauchy不等式。由此亦可证明1.2中之不等式iii）。

二、Минковский不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right\}^{1/p}\qquad(2)$$

证明 因为

$$|x_i+y_i|^p\leqslant|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right\}^{1/q}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right\}^{1/p}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right\}^{1/q}$$

由于$q(p-1)=p$，故有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\leqslant\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right\}^{1/p}\right]$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right\}^{1/q}$$

即

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right\}^{1-1/q}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right\}^{1/p}$$

因为 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，故上式便是（2）。 证毕。

不论是Hölder不等式还是Минковский不等式，从上面推导的过程中读者不难发现，不等式完全可以推广到无穷序列情况，换句话说，如果（$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$）与（$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$）是两个实数序列，则同样有不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i|\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{1/p}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right\}^{1/q}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\quad 且\ 1<p,\ q<+\infty\right)$$

及

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right\}^{1/p}$$

成立。

§2 度量空间

极限运算是数学分析中最基本的一种运算。但对于这个重要的概念，我们事实上已在作逐步的推广。起始我们定义实数序列的收敛问题，而后又考察向量序列的收敛。我们甚至还考察过函数序列的一致收敛。如果把函数看成是某种抽象集合的一个元素，那么一致收敛就是这个集合（空间）内元素序列的一种收敛。以上这些收敛，虽然涵义各不相同，但都只有一个共同的特性，那就是元素序列x_n任意地"靠近"某个元素x。所谓任意靠近，是指x_n与x的距离可以无限制地缩小。所以各种收敛之间只是距离的定义不同而已。它们之间却存在着初看起来似乎没有多大联系而实际上却是本质的联系。因此，我们完全有理由对某种抽象集合也引入距离，并且把距离的概念作统一处理，使所得理论能适用于更一般的情形。当然我们在定义抽象集上的距离的时候必须让引入的距离与传统的观念一致，即要反映出传统距离所带有的基本特性。

2.1 距离和度量空间

通常所说的距离包含三个基本特性。一是距离总是一个非负的实数；二是A到B的距离总等于B到A的距离；三是三角形两边之和不小于第三边。因此，如果在积集$X\times X$上存在一个非负的实值函数d，满足上述三条基本性质，这个函数d就可以认为是集X上的一种距离。下面便是距离的严格定义。

定义 设X是集。任何定义在$X\times X$上且满足下列条件的非负实值函数d，均称为X上的一个距离：

i）　对任意的$x\in X$，$y\in X$，有$d(x,y)\geqslant 0$，而等号成立当且仅当$x=y$时。

ii）　对任意的x，$y\in X$，有$d(x,y)=d(y,x)$。

iii）　对任意的x，y，$z\in X$，有

$$d(x,y)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

一个定义了距离的集称为度量空间（或距离空间）。度量空间的元素称为点。

例1　设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为R^n的任意两点。在$R^n\times R^n$上定义非负实值函数d如

$$d(X,Y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$

容易验证，d是R^n上的距离。所以R^n可以赋以距离d而成为一个度量空间。这样定义的距离称为Euclid距离。

例2　我们也可以在R^n内引入别的距离。例如

$$d_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$d_p(X,Y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{1/p}(1\leqslant p<+\infty)$$

$$d_\infty(X,Y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i-y_i|)$$

等等，读者容易利用绝对值的性质以及Минковский不等式验证d_1，d_p，d_∞都是R^n的距离。所以R^n在上述三种距离下都是度量空间。由此可知，同一个空间可赋以不同的距离而成为不同的度量空间。通常我们用记号$(X;d)$表示集X在距离d下的空间。于是$(R^n;d_1)$，$(R^n;d_p)$，$(R^n;d)$便是不同的度量空间。今后在不作特别的申明下，$(R^n;d)$都指

的是Euclid距离。

设（X；d）是度量空间，X'是它的子集。如果X'中两点的距离仍按X中这两点的距离来定义，那么X'也是一个度量空间，并称为是X的一个**度量子空间**。在我们今后的讨论中，度量子空间也往往是作为独立的度量空间而被研究的。

度量空间（X；d）的子集E称为是**有界的**，如果存在正实数M及点$q\in X$，使对一切$p\in E$有$d(p, q)<M$。子集E不是有界的便称作是无界的。

2.2 度量空间的其它例子

一、l_p空间（$1\leqslant p<+\infty$）

令X是使$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{1/p}$收敛的一切实（复）数列（$x_1$, x_2, …, x_n, …）所成的集合，其中p是大于等于1的实数。并设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$和$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$为$X$内任意两个元素。在$X\times X$上定义实函数$d_p$如下：

$$d_p:(x,y)\longmapsto\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right\}^{1/p}$$

容易验证，d是X上的一个距离。称（X；d_p）为l_p空间。

二、m空间

令X为由所有有界序列$\{x_n\}$组成的集合。设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$和$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$为$X$的任意两个元素。在$X$内引入度量：

$$d(x, y)=\sup_{i\geqslant 1}|x_i-y_i|$$

由实数及其上确界的性质容易证明d是X上的一个距离。

称（X；d）为m空间（或有界序列空间）。

三、令X为定义在〔a, b〕上的连续函数的全体。设x, y为X的任意两个元素。定义

$$d: (x, y) \longmapsto \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$$

容易验证d满足距离的三条公理。事实上，

i) 对任何$x\in X$与$y\in X$，显然有$d(x, y)\geqslant 0$。而欲使 $\max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|=0$，当且仅当$x(t)\equiv y(t)$ 。

ii) $d(x, y)=d(y, x)$也是非常显然的。

iii) 对$t\in$〔a, b〕，考察X内任意三个元素x, y, z，我们有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|y(t)-z(t)|\\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]} |x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]} |y(t)-z(t)|\\ &=d(x, z)+d(y, z)\end{aligned}$$

再对左边的t取max，得

$$d(x, y)=\max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|\leqslant d(x, z)+(y, z)$$

所以在上述距离下，X是一个度量空间，称为带有Чебышев度量的连续函数空间，并记作$C_{[a,b]}$ 。

我们在连续函数空间内还可以引入其它度量。例如

$$d_p(x, y)=\left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right\}^{1/p}$$

$$(1\leqslant p<+\infty)$$

带有d_p的连续函数空间称为具有p幂度量的连续函数空间，并记为$C^p_{[a,b]}$ 。

四、设X为任意集。定义$d: X\times X\longrightarrow R$如下：

$$d(x, y)=\begin{cases}1, & x \neq y \\ 0, & x=y\end{cases} \quad (x, y \in X)$$

这样的d一样是X上的距离，通常称为**离散度量**或**平凡度量**。

2.3 序列的收敛

定义 设$(X; d)$是度量空间。$\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$是它的一个元素序列。若存在$x_0 \in X$使

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0)=0$$

则称$\{x_n\}$收敛到x_0，并记成$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$

定理 1 设$\{x_n\}$为度量空间$(X; d)$的一个收敛序列，则

i) $\{x_n\}$只收敛到唯一的点；

ii) $\{x_n\}$有界；

iii) $\{x_n\}$的任何一个子序列也收敛到同一点。

证明：

i) 设$\{x_n\}$不仅收敛到x而且还收敛到y。由定义，任给正数$\varepsilon>0$，存在正整数N_1与N_2，使

$$\forall n(\geqslant N_1) \Rightarrow d(x_n, x)<\varepsilon/2$$

$$\forall n(\geqslant N_2) \Rightarrow d(x_n, y)<\varepsilon/2$$

令$N=\max(N_1, N_2)$。于是

$$\forall n(\geqslant N) \Rightarrow d(x, y) \leqslant d(x, x_n)+d(y, x_n)<\varepsilon$$

由ε的任意性，得$d(x, y)=0$，从而$x=y$。

ii)，iii)的证明留给读者。

定理 2 设$X_k=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$

$(k=1, 2, \cdots)$是$(\mathrm{R}^n; d)$的一个序列，其中d是Euclid距离。欲使它收敛到$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，当且仅当对每一个$j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$，有

$$\lim_{k\to+\infty} x_j^{(k)} = x_j$$

证明：必要性。

设$\{X_k\}$收敛到X，则有$\lim\limits_{k\to+\infty} d(X_k, X)=0$。因为

$$|x_j^{(k)}-x_j|\leqslant d(X_k, X) \qquad (1\leqslant j\leqslant n)$$

故有$|x_j^{(k)}-x_j|\to 0$ $(k\to+\infty)$，即

$$\lim_{k\to+\infty} x_j^{k} = x_j \quad (1\leqslant j\leqslant n)$$

充分性

设$\lim\limits_{k\to+\infty} x_j^{(k)} = x_j (1\leqslant j\leqslant n)$，令$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

由于

$$d(X_k, X)\leqslant\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(k)}-x_j|$$

而此不等式右端和式之每一项当$k\to+\infty$时都趋于零，故亦有

$$\lim_{k\to+\infty} d(X_k, X)=0$$

如同R^1一样，我们可以定义度量空间内的Cauchy序列（或基本序列）。

定义 设$\{x_n\}$是度量空间$(X; d)$的一个元素序列。如果对任意给定的$\varepsilon>0$，恒存在正整数N，使

$$\forall n, m(\geqslant N)\Rightarrow d(x_m, x_n)<\varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是$(X; d)$的一个Cauchy序列（或基本序列）。

度量空间内的收敛序列显然是Cauchy序列，但Cauchy序列未必都是收敛序列。然而有

定理 3 为使（R^n；d）的点列$\{X_k\}$是收敛的，必须而且只须$\{X_k\}$是（R^n；d）的Cauchy序列。

证明：必要性。

设$\lim\limits_{k\to+\infty}X_k=X$。于是

$$\forall \varepsilon(>0),\exists K(\in N),\forall k(\geqslant K)$$
$$\Longrightarrow d(X_k,X)<\varepsilon/2$$

从而

$$\forall i,\ j(\geqslant K)\Longrightarrow d(X_i,X_j)\leqslant d(X_i,X)+ d(X_j,X)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

即$\{X_k\}$是（R^n；d）的一个Cauchy序列。

充分性：

假定$X_k=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_n^{(k)})$，$(k=1,2,\cdots)$是（$R^n$；$d$）的一个Cauchy序列。于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$K$，当$i$，$j\geqslant K$时，有$d(X_i,X_j)<\varepsilon$，由于

$$|x_p^{(i)}-x_p^{(j)}|\leqslant d(X_i,X_j)<\varepsilon\quad(1\leqslant p\leqslant n)$$

所以对每个固定的$p(1\leqslant p\leqslant n)$，$\{x_p^{(k)}\}(k=1,2,\cdots)$都是$R^1$的Cauchy序列，因而收敛。设

$$\lim_{k\to+\infty}x_p^{(k)}=x_p\ (1\leqslant p\leqslant n)\text{ 及}$$

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

由定理2之充分性，得$\lim\limits_{k\to+\infty}X_k=X$。 证毕。

度量空间内的每一个Cauchy序列如果总是收敛到该空

间的某一元素，便称这种度量空间是完备的。由此可知，空间（R^n；d）是完备的。

例：对带有 Чебышев 度量的连续函数空间 $C_{[a,b]}$ 来说，由于它的度量是按如下方式定义的：

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = \|f-g\|,$$

$$(f,\ g\in C_{[a,b]})$$

所以如果 $\{f_n\}$ 是 $C_{[a,b]}$ 的一个 Cauchy 序列，那就意味着函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,\ b]$ 上是一致收敛的。所以它的极限函数 $f(x)$ 亦在 $[a,\ b]$ 上连续，即 $f\in C_{[a,b]}$。从而 $C_{[a,b]}$ 是完备的。

我们还可以进一步证明，空间 $C^p_{[a,b]}$，空间 m 和空间 l_p 都是完备的。一个完备的空间具有很强的内在性质，例如成立“闭球套”定理等等。在完备的空间上研究问题往往能获得完全的解答。

2.4 开集和闭集

开集和闭集是度量空间的两类重要子集。它们的重要性将会在今后的学习中看得越来越清楚。

一、开集

为了定义开集，我们先引进几个与此有关的其他概念。在下面的讨论中我们都假定（X；d）是度量空间，而 S 是它的子集。

i） **开球与闭球**：设 $p_0\in(X;\ d)$，r 为某一正实数。称集

$$O(p_0;\ r) = \{p:\ p\in X \text{且} d(p_0,\ p)<r\}$$

与

$$O(p_0;\ r)=\{p:\ p\in X且d(p_0,p)\leqslant r\}$$

分别是以p_0为中心、r为半径的开球与闭球。

有时为了强调$O(p_0;\ r)$的点取自X，我们可以将$O(p_0;\ r)$写成$O_X(p_0;\ r)$以表示是X内的球。如果集S是X的一个子集，它在$(X;\ d)$的原度量下是$(X;\ d)$的一个度量子空间。这时我们定义$S\cap O_X(p_0;\ r)$为S内中心在$p_0(\in S)$、半径为r的开球，并记为$O_S(p_0;\ r)$(图24)。

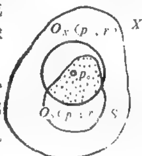

图 24

例如，R^1的子集$[0,\ 1)$可以看成是它的度量子空间$S=[0,\ 2]$内的球$O_S(0;1)$。

ii) 球形邻域：一个以p_0为中心的开球$O(p_0;\varepsilon)$称为p_0的一个ε－邻域，或简单地说成是p_0的一个球形邻域。

iii) 内点：如果存在一个以p_0为中心、完全含在S内的开球，便称p_0是S的一个内点。

显然，p_0若是S的内点，p_0必须属于S。如果$O(p_0;\ \varepsilon)\subset S$，则$O(p_0;\ \varepsilon)$内的每一个点都是$S$的内点。$S$的全体内点称为$S$的内部，记为$\mathrm{Int}S$。

iv) 开集：如果集S的每一个点都是S的内点，则称S是开集。

按定义，每个球形邻域都是开集。我们还可以举出很多开集的例子。例如X和空集都是开集；任何集S的内部$\mathrm{Int}S$是开集，并且是含在S内的最大开集；R^1的开区间是R^1的开集。但$R^n(n>1)$内连接两点Y、Z的线段

$$E=\{X=tY+(1-t)Z,\ t\in(0,1)\}$$

则不是R^n的开集(为什么？)

任意度量空间内的开集其结构可能是非常复杂的。但 R^1 内的开集却有一个很简单的结构。我们知道，R^1 内的开区间是 R^1 的开集，但 R^1 的开集不仅仅是开区间。然而我们可以证明 R^1 的每一个非空开集一定是有限个或可数个互不相交的开区间之并。

事实上，若设 G 是 R^1 的一个非空开集。任取 $x_0\in G$，则存在开区间 $(x, y)\subset G$ 且 $x_0\in(x, y)$。
令

$$E_1=\{y:[x_0, y)\subset G\}$$
$$E_2=\{x:(x, x_0]\subset G\}$$

由于任何非空实数集都存在上、下确界，故令

$$\beta=\sup E_1,\qquad \alpha=\inf E_2$$

可以证明开区间 $(\alpha\ \beta)$ 是 G 内含有 x_0 的最大开区间。换言之，如果 α、β 为有限时，α，β 必不能属于 G（否则将与 β、α 分别是 E_1 与 E_2 的上、下确界矛盾！）。我们称这种区间 (α, β) 为开集 G 的一个构成区间。显然 G 中每一点 x_0 都存在而且只能有一个构成区间包含 x_0。所以 G 的全体构成区间之并正好与 G 重合。另一方面，既然 G 中每一点 x_0 只能与一个构成区间相对应，所以任何两个构成区间是不可能相交的。又由于任何一个构成区间至少包含一个有理数为端点的开区间，而以有理数为端点的开区间全体是可数的，所以 G 的构成区间至多可数。

二、闭集

我们同样先引入与闭集有关的几个概念。

i） 极限点：如果 p_0 的每一个邻域内总含有 S 的但不同于 p_0 的点，则称 p_0 是 S 的一个极限点。

从定义可以看出，如果 p_0 是 S 的极限点，则 p_0 的任何一

个邻域内实际上含有S的无穷多个点。所以一个有限点集不可能有极限点。至于p_0是否一定属于S则不一定。

例如，$A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\cdots\}$是$R^1$的一个子集，$p_0=0$是$A$的唯一极限点，但$0\notin A$。

与极限点相对的概念是孤立点的概念。p_0称为是S的孤立点，当且仅当$p_0\in S$并且p_0不是S的极限点。

ii） 闭集：如果S包含它的全部极限点则称S是闭集。

显然闭区间$[a, b]$是R^1的一个闭集，但我们即将看到，闭集不仅仅是闭区间。

按定义容易证明，有限点所成的集是闭集。集$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\cdots, \}$不是$R^1$的闭集，因为它有一个极限点0不属于此集。

记S的极限点全体为S'。称集$S\cup S'$为S的闭包，并记为$\bar{S}$。容易证明，S'和$\bar{S}$都是闭集，并且$\bar{S}$还是包含S的最小闭集。

三、开集和闭集的一些性质

定理 4 度量空间$(X; d)$的子集S为开的充分而必要的条件是它的余集S^c是闭集；子集F为闭的充分而必要的条件是它的余集F^c是开的。

证明 定理的后半部分是前半部分的直接推论，故只须证明前一部分。

必要性：设p是S^c的一个极限点。若p不属于S^c，则p属于S。因为S是开集，故存在$O(p)\subset S$，即$O(p)$不含有S^c的点。这与p为S^c的极限点矛盾！所以p只能属于S^c，从而S^c是闭集。

充分性：假定S^c是闭集。若$p\in S$，则$p\notin S^c$并且p不能是S^c的极限点。故存在p的邻域$O(p)$，使$O(p)\cap S^c=\varnothing$。由此推出$O(p)\subset S$，即S是开集。

由定理4可以看出，空集$\varnothing$与整个空间X既是开集又是闭集。借助$\mathbf{R}^1$内开集的结构还可推知$\mathbf{R}^1$内闭集的结构。即，如果F是$\mathbf{R}^1$的闭集，那么F或者是整个数直线，或者是由数直线除去至多可数个互不相交的开区间所成。

定理 5 任意两个（从而是有限个）开集的交是开集；任意个（有限或无限个）开集的并集是开集。

证明

i） 设G_1，G_2是度量空间$(X;d)$的任意两个开集，并令$G=G_1\cap G_2$。若$G_1\cap G_2=\varnothing$，结论是显然的，因为空集是开集。若$G\neq\varnothing$，则存在p，使$p\in G_1$且$p\in G_2$，故存在开球$O(p;r_1)\subset G_1$及开球$O(p;r_2)\subset G_2$。令$r=\min(r_1,r_2)$，于是有

$$O(p;r)\subset G_1\text{且}O(p;r)\subset G_2,$$

从而$O(p;r)\subset G=G_1\cap G_2$，即$G$为开集。

ii） 设$\{G_\alpha\}$为开集族，其中α取遍某附标集A，而A的元素可以有限也可以无限。令$G=\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$。设$p\in G$，$p$便属于某个$G_\alpha$，故存在$p$的邻域$O(p)$使$O(p)\subset G_\alpha$，更有$O(p)\subset G$，故$G$是开集。

定理 6 任意两个（从而有限个）闭集的并集是闭集；任意个（有限或无限个）闭集的交集是闭集。

考虑到De Morgan公式

$$(\bigcup_\alpha A_\alpha)^c=\bigcap_\alpha A_\alpha^c,\qquad(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c=\bigcup_\alpha A_\alpha^c$$

以及定理4，本定理即成为定理5的直接推论。

定理 7 F为闭集的充分而必要条件是$F=\bar{F}$。

证明 充分性：若$F=\bar{F}$，因为$\bar{F}=F\cup F'$，所以F包含它的所有极限点F'，故F为闭集。

必要性：若F为闭集，则$F'\subseteq F$，所以$\bar{F}=F'\cup F=F$。

2.5 紧集

我们曾在第二章提及过紧集的概念。这一节我们不仅要深入讨论这个问题而且还要把它放到度量空间来研究。为此我们首先把R^1的开覆盖概念推广到度量空间。

设S是X的一个子集，并设$G=\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$是度量空间$(X,d)$的一个开集族，其中$\alpha$取自附标集$A$，而$A$的元素可以有限亦可无限。假如$S\subset\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$，则称$\{G_\alpha\}$是$S$的一个开覆盖。

设G是S的一个开覆盖，而$\tilde{G}$是G的一个子族。如果$\tilde{G}$也是S的一个覆盖，便称它是G的一个子覆盖。当子覆盖$\tilde{G}$的成员是有限时，便称$\tilde{G}$是G的关于S的一个有限子覆盖（简称有限覆盖）。

定义 称度量空间(X,d)的子集K是紧的，当且仅当它的每一个开覆盖存在着有限子覆盖。

特别，当(X,d)本身为紧时便称X是一个紧空间。

定理 8 紧集的闭子集是紧集。

证明 设K是度量空间(X,d)的紧集，F是它的闭子集。我们要证明F也是紧集。亦即要证明，对的任F意一个开覆盖一定存在有限子覆盖。为此，设$\{G_\alpha\}$是F的任意一个开覆盖。于是$F^c\cup(\bigcup_\alpha G_\alpha)$便是$K$的一个开覆盖。由

于K是紧的，所以能从这个开覆盖中选出有限个开集将K覆盖。设它们是F^c，G_{α_1}，G_{α_2} …，G_{α_n}。于是

$$K \subset F^c \cup G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$$

特别，

$$F \subset F^c \cup G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$$

但$F \cap F^c = \varnothing$，所以

$$F \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$$

这就证明了F是紧集。

定理 9 度量空间内的每一个紧集都是有界而且闭的。

证明

i）有界性：设q是度量空间（X；d）的任意一点。开球族$\{O(q;\ n)\}_{(n=1,2,\cdots)}$组成$X$的一个开覆盖，当然更是$K$的一个开覆盖。由$K$的紧性，可以从这个开覆盖中选取有限个开球覆盖$K$，所以$K$有界。

ii） 闭性：

我们要证明K^c是开的。任取$q \in K^c$，对每个$p \in K$，令$r_p = \frac{1}{2} d(p, q)$，于是$O(p;\ r_p)$不含$q$。开球族$\{O(p;\ r_p):\ p \in K\}$是$K$的一个开覆盖。因为$K$是紧集，所以可从中选取有限个开球，譬如，$O(p_1;\ r_{p_1})$，$O(p_2;\ r_{p_2})$，…，$O(p_n;\ r_{p_n})$覆盖$K$，即

$$K \subset O(p_1;\ r_{p_1}) \cup O(p_2;\ r_{p_2}) \cup \cdots \cup O(p_n;\ r_{p_n})$$

令$\delta_q = \min\{r_{p_1},\ r_{p_2},\ \cdots,\ r_{p_n}\}$。$O(q;\ \delta_q)$便不与$K$相交。所以对每一个$q \in K^c$，都存在邻域$O(q;\ \delta_q) \subset$

K^c。这说明K^c是开集，从而K是闭集。

定理10（Bolzano—Weierstrass）　设K是紧集，S是K的无穷子集，则K内必存在S的极限点。

证明　若K不含S的极限点，则对每一个$p\in K$，都存在p的邻域$O(p)$使除p有可能属于S之外，在$O(p)$内不含其它的S的点。显然，$\{O(p)\}_{p\in K}$是K的一个开覆盖。但我们不能从中选取有限个覆盖S，更不可能有限覆盖K。这与K的紧性相矛盾。故在K内不能不含S的极限点。

定理10可以回答我们为什么要把具有有限覆盖性质的集K称为紧集的理由。因为这种集（或空间）的元素间的结构是那样地"紧致"，以致于它的每一个无限集在K内不可能没有极限点。

定义　称$\mathbf{R}^n$的子集$\mathrm{I}=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$为$\mathbf{R}^n$的一个闭区间，其中对每一个$i$，满足$a_i<b_i$。若令$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则闭区间I也简单地记成$\mathrm{I}=[a,b]$。

令$\mathrm{diam}\,\mathrm{I}=\max\{d(X,Y):X\in\mathrm{I},Y\in\mathrm{I}\}$为区间I的直径。我们有

引理　设$\{\mathrm{I}_k\}$是$\mathbf{R}^n$的一个闭区间套序列，满足

i）$\mathrm{I}_1\supseteq\mathrm{I}_2\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{I}_n\supseteq\mathrm{I}_{n+1}\supseteq\cdots$；

ii）$\mathrm{diam}\,\mathrm{I}_k\to0\ (k\to+\infty)$。

则存在唯一的X属于每一个I_k（$k=1,2,\cdots$）。

证明　我们不妨假定$n>1$。因为$n=1$时即为我们熟知的闭区间套定理（第二章定理8）。设$\mathrm{I}_k=[\mathbf{a}^{(k)},\mathbf{b}^{(k)}]$，其中

$$\mathbf{a}^{(k)}=(a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_n^{(k)})$$

$$b^{(k)}=(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \cdots, b_n^{(k)})$$

置$I_j^{(k)}=[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}]$（$1\leqslant j\leqslant n$）。$I_j^{(k)}$便是$R^1$的闭区间。固定每一个 j，$\{I_j^{(k)}\}$（$k=1, 2, \cdots$）是直径收缩于零的闭区间套序列，故存在唯一实数x_j属于每一个$I_j^{(k)}$（$k=1, 2\cdots$）。令$X=(x_1, x_2\cdots, x_n)$，从而对每一个k，有$X\in I_k$。显然这种X是唯一的。因为如果还存在另一个不同于X的$X'=(x_1', x_2', \cdots, x_n')$也属于每一个$I_k$，则必有某个i使$x_i\neq x_i'$，而$x_i$与$x_i'$属于每一个$I_i^{(k)}$($k=1, 2, \cdots$)。由第二章定理8这是不可能的。

定理9已经证明了度量空间的任何一个紧子集都是有界闭集，但度量空间的有界闭集不一定都是紧集。例如R^1的半开区间$A=(0, 1]$作为子空间也是一个度量空间。A作为一个度量空间它是闭的，显然也是有界的，但它不是紧的。虽然如此，我们可以证明R^n内的紧集与有界闭集是等价的。为此，我们证明

定理11　R^n的每一个有界闭区间I是紧的。

证明　设$I=[a, b]$，其中$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$。假若I非紧，则存在它的一个开覆盖$\{G_\alpha\}$，但不能有限覆盖I。置

$$c_j=\frac{1}{2}(a_j+b_j)\qquad(1\leqslant j\leqslant n)$$

一维区间$[a_j, c_j]$与$[c_j, b_j]$决定了2^n个R^n的子区间，它们彼此无公共内点，而它们的并则为I.从而这些子区间中至少有一个，譬如I_1不能被$\{G_\alpha\}$有限覆盖。再象起始一样，分I_1为2^n个小区间，其中也至少有一个，譬如I_2不能被$\{G_\alpha\}$有限覆盖。继续这个过程可得R^n的闭区间序列$\{I_k\}$具有如下性质：

i）　$I\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$；

ii） $\operatorname{diam} I_k = \frac{1}{2^k}\left\{\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0$；

iii） 对每一个k，I_k都不能被$\{G_\alpha\}$有限覆盖。

由引理，存在唯一的$X \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$。因为$X \in I$，所以存在$\{G_\alpha\}$的某个成员$G_{\alpha'}$使$X \in G_{\alpha'}$。因此有邻域$O(X;r)$使$O(X;r) \subset G_{\alpha'}$。另一方面，存在充分大的$K$使

$$\frac{1}{2^k}\left\{\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < r$$

又因为X也属于I_k，所以对每一个$y \in I_k$，有

$$d(X, Y) \leqslant \operatorname{diam} I_k < r$$

此即说，$I_k \subset G_{\alpha'}$。但这与I_k的假定iii）显然是矛盾的！所以$[a, b]$必能被$\{G_\alpha\}$有限覆盖。

定理12（Heine—Borel） R^n的有界闭集K是紧集。

证明 因为K有界，所以存在闭区间$[a, b]$使$K \subset [a, d]$。由于$[a, b]$是紧集，K又是包含在此紧集内的闭子集，所以根据定理8，K是紧集。

推论 R^n的子集K为紧的充分而必要的条件是K为有界闭集。

证明 必要性即定理9，充分性即本定理。

定理13（Bolzano—Weierstrass） 设S是R^n的任意一个有界无穷集，则S恒存在极限点。

证明 因为S有界，故存在R^n的闭区间I，使$S \subset I$。因为I是紧的（定理12），故由定理10，I内必含有S的极限点。

推论 一个紧度量空间是完备的度量空间。

§3 连续映射

作为连续函数概念的推广，这一节我们讨论一个度量空间到另一个度量空间内的连续映射，特别要研究在紧度量空间上的连续映射。

3.1 连续映射及其性质

让我们回忆一下，函数f：$R^1 \longrightarrow R^1$在$x=x_0$连续的定义："任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立"。此即说，任给$f(x_0)$的一个$\varepsilon$－邻域$O(f(x_0);\ \varepsilon)$，必存在$x_0$的一个$\delta$－邻域$O(x_0;\ \delta)$使$f(O(x_0;\ \delta))\subset O(f(x_0);\ \varepsilon)$。

现在我们用完全相似的方式定义度量空间上的连续映射。

定义 设f是度量空间$(X_1;\ d_1)$到度量空间$(X_2;\ d_2)$内的映射。$p_0\in(X_1;\ d_1)$。如果任给$f(p_0)$的一个ε－邻域$O(f(p_0);\ \varepsilon)$，恒存在p_0的一个δ－邻域$O(p_0;\ \delta)$，使

$$f(O(p_0;\ \delta))\subset O(f(x_0);\ \varepsilon)$$

则谓f在p_0连续。

用ε—δ语言来叙述这个定义，便是"任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对于满足$d_1(p,\ p_0)<\delta$的每一个p，均有$d(f(p),\ f(p_0))<\varepsilon$成立"。

如果对每一点$p\in(X_1;\ d_1)$，映射f都是连续的，则d_2称f在$(X_1;\ d_1)$上是连续的。

定理14 设$(X;\ d_1)$，$(Y;\ d_2)$和$(Z;\ d_3)$为三个度量空间。而映射f：$X\longrightarrow Y$在$p\in X$连续，映射g：$Y\longrightarrow$

Z在$f(p)\in Y$连续。则复合映射$h=g\circ f$在p连续。

证明　任给$\varepsilon>0$，存在　$\eta>0$，对一切满足$d_2(y, f(p))<\eta$的$y(\in Y)$，有

$$d_3(g(y), g(f(p)))<\varepsilon \qquad (1)$$

对于上述的$\eta>0$，存在$\delta>0$，对一切满足 $d_1(p, q)<\delta$的$q(\in X)$，有

$$d_2(f(q), f(p))<\eta \qquad (2)$$

视$f(q)=y$。由（1）、（2），对一切满足$d_1(p, q)<\delta$的$q\in X$，有

$$d_3(g(f(q)), g(f(p)))=d_3(h(q), h(p))<\varepsilon$$

按定义，$h=g\circ f$在$p\in X$连续。

定理15　下列两个条件之一都是度量空间（X；d_1）到度量空间（Y；d_2）内的映射f成为连续的充分而必要的条件：

i）　对Y的每一个开集V，$f^{-1}(V)$是X的一个开集。

ii）　对Y的每一个闭集F，$f^{-1}(F)$是X的一个闭集。

证明　因为对于Y的每一个子集D有$f^{-1}(D^c)=[f^{-1}(D)]^c$，而闭集关于空间的余集是开集，所以如果证明了i），那么也就证明了ii）。为此只须证明i）。

必要性：设f在X连续，V是Y的一个开集。我们证明，$f^{-1}(V)$的每一个点都是它的内点。

设$p\in f^{-1}(V)$。于是$f(p)\in V$。因为V是开集，所以存在$f(p)$的一个ε－邻域$O(f(p); \varepsilon)$，使$O(f(p); \varepsilon)\subset V$。又因为$f$在$p$连续，所以存在$p$的一个$\delta$－邻域$O(p; \delta)$，使$f(O(p; \delta))\subset O(f(p); \varepsilon)\subset V$。此即说，$O(p; \delta)\subset f^{-1}(V)$，因而$p$是$f^{-1}(V)$的内点，$f^{-1}(V)$

便是X的开集。

充分性：假定对Y的每一个开集V，$f^{-1}(V)$是开集，并设p是X的任意一点，ε是事先任意给定的正数。令$V=O(f(p);\ \varepsilon)$。这是Y的一个开集。由定理假定，$f^{-1}(V)$也是开集。因为$p\in f^{-1}(V)$，所以存在δ使$O(p;\ \delta)\subset f^{-1}(V)$。故

$$f(O(p;\ \delta))\subset V=O(f(p);\ \varepsilon)$$

按定义，f在p连续。再由p的任意性知f在X上连续。

定理16　设f是紧度量空间X到度量空间Y的一个连续映射，则$f(X)$是紧集。

证明　设$\{G_\alpha\}$是$f(X)$的一个开覆盖。因为f连续，所以$\{f^{-1}(G_\alpha)\}$是X的一个开覆盖。因为X是紧的，所以能从$\{f^{-1}(G_\alpha)\}$中选出有限个覆盖X。设

$$X\subset f^{-1}(G_{\alpha_1})\cup f^{-1}(G_{\alpha_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(G_{\alpha_n})$$

故

$$f(X)\subset\bigcup_{k=1}^{n}ff^{-1}(G_{\alpha_k})\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}$$

（见第一章习题8，9），所以对于$f(X)$能实现有限覆盖。按定义$f(X)$为紧。

由此再次得到：若f是一维有界闭区间$[a,\ b]$上的连续函数，则它必有界而且能达到最大与最小值（第二章定理10），这是因为$f([a,\ b])$亦是$\mathbf{R}^1$的有界闭集的缘故。同样的结论对于$\mathbf{R}^n$上的有界闭集特别是$\mathbf{R}^n$的有界闭区间上的连续函数也成立。更一般地，有

定理17　设$(X;\ d)$是紧度量空间，f是$(X;\ d)$到$\mathbf{R}^1$内的连续函数，则f能在$(X;\ d)$取得最大值和最小值。

证明　令$E=f(X)$。由定理16，E是$\mathbf{R}^1$的紧集，从而

是有界闭集。令

$$M = \sup E, \qquad m = \inf E$$

由上确界定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists y \in E$，使

$$M \geqslant y > M - \varepsilon$$

此即说，任给$O(M;\ \varepsilon)$，存在$y \in E$ 使$y \in O(M;\ \varepsilon)$。所以$M \in \bar{E} = E$。换言之，存在$p \in X$，使$f(p) = M$。

同理可证，存在$q \in E$使$f(q) = m$。

3.2 一致连续

定义 设f是$(X;\ d_1)$到$(Y;\ d_2)$内的映射。若任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使

$$\forall p,\ q \in X:\ d_1(p,\ q) < \delta \Rightarrow d_2(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

则称f在$(X;\ d_1)$上是一致连续的。

从定义立即可以看出，若f在$(X;\ d_1)$上一致连续，则f在$(X;\ d_1)$上连续。

例 设S是度量空间$(X;\ d)$的一个非空子集，我们可以用实数

$$d(p;\ S) = \inf\{d(p,\ q):\ q \in S\}$$

定义$q \in X$到集S的距离。这样便在X上定义了一个实函数

$$f:\ p \longmapsto d(p;\ S) = f(p)$$

可以证明f是$(X;\ d)$上的一个一致连续函数。

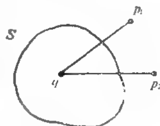

图 25

事实上，设p_1, p_2为X的任意两点，q为S的任意点(图25)，则有

$$d(p_1,\ S) \leqslant d(p_1,\ q) \leqslant d(p_1, p_2) + d(p_2, q)$$

对不等式右边关于q取下确界，得

$$d(p_1, S) \leqslant d(p_1, p_2) + d(p_2,\ S)$$

同理可得

$$d(p_2; S) \leqslant d(p_1, p_2) + d(p_1; S)$$

故

$$|d(p_1; S) - d(p_2; S)| = |f(p_1) - f(p_2)| \leqslant d(p_1, p_2)$$

因此，任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$（例如取$\delta = \varepsilon$），对任意的p_1，p_2（$\in X$），只要$d(p_1, p_2) < \delta$，恒有

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leqslant d(p_1, p_2) < \delta = \varepsilon$$

所以f在X上一致连续。

定理18（Cantor） 若f是紧度量空间（X；d_1）到度量空间（Y；d_2）内的连续映射，则f在（X；d_1）上一致连续（比较第二章定理12）。

证明 设ε为事先给定的正实数。由于f连续，所以对每一点$p \in X$都存在p的一个r_p－邻域$O(p; r_p)$使

$$\forall q \in O(p; r_p) \Longrightarrow d_2(f(p), f(q)) < \varepsilon/2$$

从而

$$\forall q' q'' \in O(p; r_p) \Longrightarrow d_2(f(q'), f(q''))$$

$$\leqslant d_2(f(q'), f(p)) + d_2(f(q''), f(p)) < \varepsilon \quad (1)$$

即对球$O(p; r_p)$内的任意两点，它们在f下的象的距离都小于ε，因而开球族$\{O(p; r_p/2)\}_{p \in X}$便是$X$的一个开覆盖（请读者思考，这里为什么不取开球族$\{O(p; r_p)\}_{p \in X}$，作为$X$的开覆盖？）。因为$X$是紧的，所以能从中选取有限个，譬如

$$O(p_1; r_{p_1}/2), O(p_2; r_{p_2}/2), \cdots O(p_n; r_{p_n}/2)$$

覆盖X。令

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{r_{p_1}, r_{p_2}, \cdots\cdots, r_{p_n}\}$$

可以证明，对于上述给定的$\varepsilon > 0$，在X内任意两点p'，

p''，只要它们的距离小于δ，一定有不等式$d_2(f(p'),f(p''))<\varepsilon$成立，从而$f$在$X$上一致连续。

事实上，设p'，p''为X内任意两点，并且满足$d_1(p',p'')<\delta$。由于上述n个开球覆盖X，所以p'必属于其中某一个，不妨设$p'\in O(p_i, r_{p_i}/2)$。于是亦有

$$p'\in O(p_i, r_{p_i}) \qquad (2)$$

另一方面，又有

$$d_1(p'', p_i)\leqslant d_1(p'', p')+d_2(p', p_i)$$
$$\leqslant \delta+r_{p_i}/2\leqslant r_{p_i}/2+r_{p_i}/2=r_{p_i}$$

此即说，亦有

$$p''\in O(p_i, r_{p_i}) \qquad (3)$$

综合(2)，(3)知p'，p''同属于球$O(p_i, r_{p_i})$

故由(1)，有

$$d_2(f(p'), f(p''))<\varepsilon$$

证毕。

特别，当X是R^n的紧区间I时，其上定义的连续函数$f(p)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在I上是一致连续的。

3.3 压缩映射及其应用

下面我们研究$(X; d)$到其自身内的一种特殊映射。

定义 设f是度量空间$(X; d)$到其自身内的映射。若存在实数$\lambda\in(0, 1)$使对X的任意两点p，q，恒有不等式

$$d(f(p), f(q))\leqslant \lambda d(p, q)$$

成立，便称f是$(X; d)$内的一个压缩映射。

从定义可以看出，X到其自身内的压缩映射必为X内的

连续映射，并且是一致连续映射。

定理19（Banach压缩映射原理） 设（X；d）是完备的度量空间，f是（X；d）内的压缩映射，则存在f的唯一不动点p_0（即存在唯一的$p_0 \in X$，使$f(p_0)=p_0$成立）。

证明：任取$p_1 \in X$，置

$$p_{n+1}=f(p_n) \quad (n=1,2\cdots)$$

则有

$$d(p_2,p_3)=d(f(p_1),f(p_2)) \leqslant \lambda d(p_1,p_2)$$

$$d(p_3,p_4)=d(f(p_2),f(p_3)) \leqslant \lambda d(p_2,p_3) \leqslant \lambda^2 d(p_1,p_2)$$

一般地，有

$$d(p_n,p_{n+1}) \leqslant \lambda^{n-1} d(p_1,p_2) \quad (n=1,2,\cdots)$$

今设m，n为两个正整数，并且假定$m>n$。于是

$$\begin{aligned} d(p_n,p_m) &\leqslant d(p_n,p_{n+1})+d(p_{n+1},p_{n+2})+\cdots+d(p_{m-1},p_m) \\ &\leqslant (\lambda^{n-1}+\lambda^n+\cdots+\lambda^{m-2})\, d(p_1,p_2) \\ &\leqslant \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(p_1,p_2) \qquad (*) \end{aligned}$$

而$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}d(p_1,p_2)=0$，所以$\{p_n\}$是$(X;d)$的一个Cauchy序列。由于$X$是完备的，所以

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = p_0 \in X$$

对$p_n=f(p_{n-1})$两边求极限，并考虑到f的连续性，得

$$p_0=f(p_0)$$

因而p_0是f的一个不动点。

下面证明不动点的唯一性。

假定还有$p' \in X$亦满足$f(p')=p'$。于是有

$$d(p_0, p')=d(f(p_0), f(p'))\leqslant \lambda d(p_0,p')$$

因为$0<\lambda<1$，故必须$d(p_0,p')=0$，即必须$p=p'$。

Banach压缩映射原理是分析中的一个很有价值的定理，它不仅可以用来证明诸如代数方程，微分方程，积分方程等解的存在性，而且提供了用逐次逼近来求解上述这些方程的近似解的一种实用方法。在不等式（*）中，令$m\to+\infty$，还给出了第n次迭代与真解之间的误差估计

$$r_n=d(p_n, p_0)\leqslant\frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}d(p_1, p_2)$$

例1　设$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，$f: I\to I$为可微函数并且$|f'(x)|\leqslant K$。其中$0<K<1$，则存在唯一的$x_0\in I$使$f(x_0)=x_0$。

这是因为由Lagrange中值定理知道f在区间I上满足Lipschitz条件：

$$\forall x, y\in I\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$$

故f是压缩映射。因此存在唯一的不动点x_0使$f(x_0)=x_0$。这说明$y=f(x)$的函数曲线与直线$y=x$有唯一交点。这个不动点可通过迭代法逼近（图26与图27分别表示了$0<f'(x)<1$与$-1<f'(x)<0$两种情况下的收敛过程）。

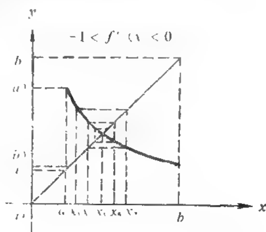

图　26

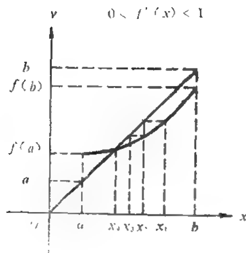

图 27

例2 方程$x=q\sin x+a$（$0<q<1$）称为Kepler方程。它是用来确定行星在其轨道上的位置的。这个方程有否唯一解呢？我们可以把它归结为映射$f(x)=q\sin x+a$是否存在唯一的不动点。由于$|f'(x)|\leqslant q<1$，所以由例1，这个方程是有唯一解的。我们可以通过迭代$x_{n+1}=q\sin x_n+a$，求出它的近似解。

例3 研究由线性方程组

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i \qquad (i=1,\ 2,\cdots n)$$

所给出的（R^n；d）到其自身内的映射$Y=f(X)$，其中$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$Y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，$d$是Euclid距离。

显然，（R^n；d）是完备的。我们来寻找使$Y=f(X)$为压缩的条件。这时不动点（$x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$，$\cdots$，$x_n^{(0)}$）

便是方程

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1)$$

的唯一解。

设$X'=(x_1',x_2'\cdots,\ x_n')$与$X''=(x_1'',\ x_2'',\cdots,x_n'')$为$R^n$的任意两点。令$f(X')=Y'$，$f(X'')=Y''$。

于是有

$$Y'=(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j'+b_1,\ \sum_{j=1}^{n}b_{2j}x_j'+b_2,\ \cdots,$$

$$\sum_{j=1}^{n}b_{nj}x_j'+b_n)$$

$$Y''=(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j''+b_1,\ \sum_{j=1}^{n}b_{2j}x_j''+b_2\cdots,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j''+b_n)$$

$$d(Y',Y'')=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j'-x_j'')\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

由Cauchy不等式，有

$$\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j'-x_j'')\right]^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j'-x_j'')^2\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\cdot d^2(X',\ X'')$$

所以，

$$d(Y',Y'')\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\cdot d^2(X',X'')\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot d(X',\ X'')$$

欲使f为压缩，只须

$$\sum \cdots \text{[illegible]} \qquad (2)$$

当条件（2）满足时，（1）的解可按迭代$X_{k+1}=f(X_k)$程序求其近似解。

例4　设$(x_0, y_0)\in R^2$，N_1是(x_0, y_0)的一个邻域，f：$R^2\longrightarrow R^1$在N_1内连续且满足Lipschitz条件（关于第二个变量）：

$$|f(x, y)-f(x, z)|\leqslant K|y-z| \quad (K\text{常数})$$

则带有初值条件$y_0=y(x_0)$的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \qquad (1)$$

在x_0的某个邻域内有唯一的解（Picard存在定理）。

证明　我们考察具有某种性质的连续函数所成的集M，以及M到其自身内的映射T：$y\longmapsto Ty$，它由

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

所定义。那么究竟怎样的M可被T映射到自身呢？为了回答这个问题，我们首先在N_1内选取(x_0, y_0)的一个邻域N_2，并使N_2是紧的。于是存在正数L，使对一切$(x, y)\in N_2$有

$$|f(x, y)|\leqslant L$$

如果$y(x)$是这样的函数，它的图形落在N_2内，则有

$$|(Ty)(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx\right|\leqslant L\cdot|x-x_0|$$

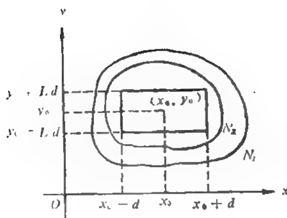

图 28

这表明，如果y是定义在$|x-x_0|\leqslant d$内并且满足$|y(x)-y_0|\leqslant L\cdot d$的连续函数，则$Ty$也满足同样条件。所以我们可以选取充分小的$d$，使

$$\mathscr{R}=[x_0-d,\ x_0+d]\times[y_0-Ld,\ y_0+Ld]$$

落在N_2之内。因此，如果我们把M定义为图形在$\mathscr{R}$内且通过(x_0, y_0)的连续函数全体（即定义在闭区间$[x_0-d, x_0+d]$上、取值在$[y_0-Ld, y_0+Ld]$，并且满足$y_0=f(x_0)$的连续函数集），那么映射T便把M映到其自身内。

M内的度量采取

$$d(y_1, y_2)=\max_x|y_1(x)-y_2(x)|=\|y_1-y_2\|$$

容易验证M是完备的（完备空间$C_{[x_0-d, x_0+d]}$的闭子集仍是完备的）。

如果令$d\cdot K<1$，我们还能保证映射T是压缩的。事实

上，有

$$|(Ty)(x)-(Tz)(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y(x))-f(x,z(x))|dx\right|$$

$$\leqslant d\cdot\max_{x}|f(x,y(x))-f(x,z(x))|$$

$$\leqslant d\cdot K\max_{x}|y(x)-z(x)|$$

从而有

$$\|Ty-Tz\|\leqslant d\cdot K\|y-z\|$$

由Banach压缩映射原理，在M内存在唯一元素（M内的元素是函数）使（1）成立。

压缩映射原理不仅阐明了不动点的存在性与唯一性，而且还为我们提供了求不动点近似解的迭代方法。收敛于x_0的逐次近似x_n可以由任意一个元素$x\in X$出发，但元素x的选择好坏会影响$\{x_n\}$的收敛速度。此外，有时不等式

$$d(f(p),f(p))\leqslant\lambda d(p,q)\quad(0<\lambda<1)\quad(*)$$

不是在整个空间X上都成立，但在X的某个闭子集F上成立，我们仍可以在F上应用压缩映射原理。但条件（$*$）中的λ必须满足$0<\lambda<1$而不能放宽为1。例如考察

$$f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x$$

由于$\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$，所以这个映射不存在不动点。但对$x<y$，由中值定理，却存在$\xi\in(x,y)$，使

$$f(y)-f(x)=y-x-\frac{y-x}{1+\xi^2}$$

即有

$$d(f(y),f(x))<d(y,x)$$

然而找不到$0<\lambda<1$ 使

$$d(f(y), f(x)) \leqslant \lambda d(y, x)$$

成立。

§4 Weierstrass逼近定理

众所周知，一个在有界闭区间上连续的函数可能每一点都不可导，但我们却能用无穷可微函数来一致逼近它。这一节我们要介绍著名的Weierstrass逼近定理与Bernstein多项式。为此先做些准备。

4.1 Стеклов函数

为了研究函数在某一点的性态，我们在每一点处用包含此点的一个小区间上函数的《平均》值来近似代替函数在这一点的值。为此引入函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt, \ (h>0) \qquad (1)$$

$f_h(x)$称为$f(x)$的Стеклов函数。

容易验证，当f在x_0连续时，有$\lim\limits_{h\to 0} f_h(x_0) = f(x_0)$。事实上，任给$\varepsilon>0$，由于$f(x)$在$x_0$连续，所以存在$\delta>0$，当$|t-x_0|<\delta$时有$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$成立。于是当$h<\delta$时，便有

$$|f_h(x_0)-f(x_0)| = \left|\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon$$

由此给我们一个启发，当$f(x)$在x_0连续时，我们可取

足够小的$h(>0)$，用$f_h(x_0)$来近似$f(x_0)$。

其实，$f(x)$只要在R上逐段连续，它的Стеклов函数便在R内处处连续。例如，对著名的Heaviside函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

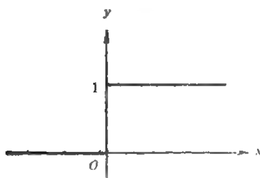

图 29

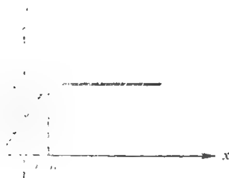

图 30

它的Стеклов函数即为

$$f_h(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -h\\ 1, & x\geqslant h\\ \dfrac{x+h}{2h}, & -h\leqslant x\leqslant h\end{cases}$$

这是在整个实轴上连续的函数。

虽然当h充分小时 我们可以用$f_h(x)$来逼近$f(x)$，但一般而言，我们不能借助$f_h(x)$来一致逼近$f(x)$．因为如果可以的话，$f(x)$岂不就要连续了？但是尽管如此，$f_h(x)$的性态总比$f(x)$有所改良了。

4.2 Стеклов函数的卷积表示

为了使用的方便，我们需将Стеклов函数表示成无穷限积分的形状，即通常所说的卷积形式。

考察函数

$$\varphi_h(x)=\begin{cases}0, & |x|>h\\ 1/2h, & |x|\leqslant h\end{cases}$$

这是R上的一个逐段连续的非负函数，并且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_h(x)\,dx=1$$

（图31）。于是可以将

（1）表示成

图 31

$$f_h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\varphi_h(x-t)\,dt \qquad (2)$$

记

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x-t)\,dt = f*\varphi_h \qquad (2')$$

并称之为f与φ_h的卷积。显然，有$f*\varphi_h=\varphi_h*f$

上面引入的$\varphi_h(x)$是一个不连续函数。但我们可以设想，如果用图形与φ_h的图形相接近的连续函数甚至可微函数来代替φ_h（图 32），那么由（2′）所产生的卷积函数可望有更优良的性质。

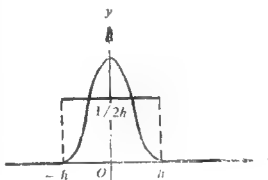

图 32

4.3 Weierstrass逼近定理

定理 对每一个定义在有界闭区间〔a, b〕上的连续函数（实或复），都能用多项式对它作一致逼近。即对任意给定的$\varepsilon>0$，恒存在多项式$P(x)$使

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|=\|f-p\|<\varepsilon$$

证明

1° 我们不妨假定$f(a)=f(b)=0$。然后将f连续地延拓到整个R,使在〔a,b〕之外有$f(x)=0$。事实上，如果上述条件不满足，我们可以考察更大的区间〔c, d〕，（$c<a<b<d$）。并在（c, a），（b, d）内用一次函数相连接，使$f(c)=f(d)=0$。于是在〔c, d〕上考察$f(x)$

即可（见图33）。最后我们还可以通过一个仿射变换T（平移与伸缩变换之复合），使$T([c,d])=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。所以我们不妨一开始就假定$[a,b]=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。

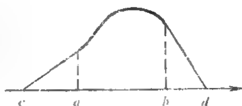

图 32

对每一个自然数n，置

$$g_n(x)=\begin{cases}(1-x^2)^n, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

设$a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}g_n(x)dx=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx$，并令$h_n(x)=g_n(x)/a_n$，则$h_n(x)$在R内连续，并且在$|x|<1$时$h_n(x)>0$；在$|x|\geqslant 1$时$h(x)=0$；此外还满足条件（通常称为规范条件）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(x)dx=1$$

由于$|x|\leqslant 1$时$1-x^2>1-x$，所以有

$$a_n>2\int_0^1(1-x)^n dx=\frac{2}{n+1} \qquad (1)$$

2° 对每一个正数δ（$0<\delta\leqslant 1$），由于

$$0\leqslant h_n(x)\leqslant\frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n\cdot 2=(n+1)(1-\delta^2)^n$$

所以当$n\to+\infty$时，$h_n(x)$在$\delta\leqslant|x|\leqslant 1$上是一致收敛于零的。

因为假设$f(x)$在$|x|\geqslant\frac{1}{2}$上等于零，所以对一切$x\in R$，有

$$(f*h_n)(x)=\frac{1}{a_n}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g_n(x-t)dt=$$

$$\frac{1}{a_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g_n(x-t)dt \qquad (2)$$

当$|x|\leqslant\frac{1}{2}$时，有$g_n(x-t)=(1-(x-t)^2)^n$（此时$|x-t|\leqslant 1$）。将（2）展开，我们看到，在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$内函数$f*h_n$是次数不大于$2n$的多项式。

3° 另一方面，我们证明在任何有界闭区间$[-E,E]$之内，$f*h_n$一致收敛到f（$n\to+\infty$）。为此考察

$$f(x)-(f*h_n)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt \qquad (3)$$

任给$\varepsilon>0$，存在$\delta\in(0,1]$，使对$[-E-1,E+1]$中两点x_1，x_2，只要$|x_1-x_2|\leqslant\delta$，就有不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon/3$$

成立。因之固定δ，将（3）的右边改写成

$$\int_{-\infty}^{-\delta}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt+\int_{-\delta}^{\delta}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt+\int_{\delta}^{+\infty}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt$$

而

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt\right|\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-t)|h_n(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta}h_n(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{3}$$

这个不等式对一切$|x|\leqslant E$都成立。又函数f在R内是有界的，设$|f(x)|\leqslant M$。故又有

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt\right|$$

$$\leqslant 2M\int_{\delta}^{+\infty}h_n(t)dt=2M\int_{\delta}^{1}h_n(t)dt$$

而$h_n(t)$在$[\delta,1]$内当$n\to+\infty$时一致收敛到零，所以存在n_0，当$n\geqslant n_0$时对一切$t\in[\delta,1]$有$0\leqslant h_n(t)\leqslant\varepsilon/6M$。此时有

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt\right|\leqslant\varepsilon/3$$

同理可证

$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta}[f(x)-f(x-t)]h_n(t)dt\right|\leqslant\varepsilon/3,$$

$$(n\geqslant n_0)$$

由此得到结论：对任意的$\varepsilon>0$，存在n_0，当$n\geqslant n_0$时，对一切的$x\in[-E,E]$，有

$$|f(x)-(f*h_n)(x)|\leqslant\varepsilon$$

即有$\|f-(f*h_n)\|\leqslant\varepsilon$。　　证毕。

4.4 Bernstein多项式

4.3证明了用多项式一致逼近连续函数的可能性，但没有给出具体地构造逼近多项式的方法。Bernstein则具体地给出了一致逼近连续函数的多项式序列。

为方便起见，我们假定$f(x)$是定义在$I=[0,1]$上的一个连续函数。称n次多项式

$$B_n(f)(t)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f\left(\frac{p}{n}\right)(1-t)^{n-p}t^p\qquad(1)$$

为f的n阶Bernstein多项式。

我们证明，当f在$[0,1]$连续时便有

$$\| f-B_n(f) \| \to 0$$

从极平凡的恒等式

$$1=(1-t+t)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(1-t)^{n-p}t^p \qquad (2)$$

出发，我们可以推出，对每一个在I内有定义的有界函数f，有

$$\| B_n(f) \| \leqslant \sup_{t\in I}|f(t)|\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(1-t)^{n-p}t^p\right]$$

$$=\| f \| \qquad (3)$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，由Weierstrass逼近定理，存在多项式P使$\| f-P \|<\varepsilon$。由(3)，有

$$\| B_n(f)-B_n(P) \| \leqslant \| f-P \| <\varepsilon \qquad (4)$$

因之，

$$\| f-B_n(f) \| \leqslant \| f-P \| + \| P-B_n(P) \| + \| B_n(P)-B_n(f) \| <2\varepsilon + \| P-B_n(P) \| \qquad (5)$$

从(5)可以看出，如果对任意一个多项式P，恒有$\| B_n(P)-P \| \to 0$，那么对任意连续函数f，便亦有$\| B_n(f)-f \| \to 0$了。又由于B_n是线性的（算子），所以我们甚至只须证明对单项式$f=t^m$有$\| B_n(t^m)-t^m \| \to 0$就足够了。

令$f_m(t)=t^m$。对充分大的n，我们对m用归纳法，证明成立等式

$$B_n(f_m)(t)=A_{m,n}t^m+\frac{1}{n}Q_{m,n}(t) \qquad (6)$$

其中$A_{m,0}=A_{m,1}=1$，而当$m\geqslant 2$时有

$$A_{m,n}=\frac{(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^{m-1}}$$

而$Q_{m,n}(t)$是一个次数小于等于$m-1$的多项式，其系数的绝对值都不超过一个与n无关的常数A_m。

事实上，当$m=0$时，由公式（2），有

$$B_n(f_0)(t)=B_n(1)(t)=$$

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(1-t)^{n-p}t^p=1 \qquad (7)$$

这时$Q_{0,n}(t)\equiv 0$ $\qquad (n=1,2,\cdots)$。

（7）两边对t求导，得

$$-\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}(n-p)(1-t)^{n-p-1}t^p$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}P(1-t)^{n-p}t^{p-1}=0 \qquad (8)$$

考虑到$(n-p)\binom{n}{p}=-n\binom{n-1}{p}$，故

$$(8)\text{式左边之第一项}=-\sum_{p=0}^{n-1}n\binom{n-1}{p}(1-t)^{n-p-1}t^p$$

$$=-nB_{n-1}(f_0)(t)=-n$$

若（8）左边第二项乘以$\frac{t}{n}$，则得

$$\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)(1-t)^{n-p}t^p=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f_1\left(\frac{p}{n}\right)$$

$$(1-t)^{n-p}t^p=B_n(f_1)(t)$$

故有

$$B_n(f_1)(t)=t \qquad (9)$$

到此已经证明$A_{1,n}=1$，$Q_{1,n}(t)\equiv 0$ $\quad (n\geqslant 1)$

现在假设对某一正整数m（$\geqslant 2$），当$n\geqslant m$时有

$$B_n(f_m)(t)=A_{m,n}t^m+\frac{1}{n}Q_{m,n}(t) \qquad (10)$$

其中 $A_{m,n}=\dfrac{(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{n^{m-1}}$ 。

将（10）改写成

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^m(1-t)^{n-p}t^p=$$

$$A_{m,n}t^m+\frac{1}{n}Q_{m,n}(t) \qquad (11)$$

并两边对 t 求导，得

$$-\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^m(n-p)(1-t)^{n-p-1}t^p+$$

$$\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\left(\frac{n}{p}\right)^m p(1-t)^{n-p}t^{p-1}=$$

$$mA_{m,n}t^{m-1}+\frac{1}{n}Q'_{m,n}(t) \qquad (12)$$

（12）式左边第一项等于

$$-\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^m(n-p)(1-t)^{n-p-1}t^p$$

$$=-n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^m(1-t)^{n-p-1}t^p$$

$$=-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\left(\frac{p}{n-1}\right)^m(1-t)^{(n-1)-p}t^p$$

$$=-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m B_{n-1}(f_m)(t)$$

$$=-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\left[A_{m,n-1}t^m+\frac{1}{n}Q_{m,n-1}(t)\right]$$

$$= -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^m \frac{[(n-1)-1]\cdots[(n-1)-m+1]}{(n-1)^{m-1}} t^m$$

$$-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m Q_{m,n-1}(t)$$

$$= -n\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{n^m} t^m$$

$$-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m Q_{m,n-1}(t)$$

（12）两边同乘$\frac{t}{n}$，故得

$$B_n(f_{m+1})(t) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{n^m} t^{m+1}$$

$$+\frac{t}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^m Q_{m,n-1}(t)$$

$$+\frac{m}{n} A_{m,n} t^m + \frac{t}{n^2} Q'_{m,n}(t)$$

$$= A_{m+1,n} t^{m+1} + \frac{1}{n} Q_{m+1,n}(t)$$

所以公式（6）对一切m成立（n充分大时）。此外，显然有

$$\lim_{n\to+\infty} A_{m,n} = 1$$

及

$$A_{m+1} \leqslant 3\sup(m,\ (n-1)A_m)$$

所以有

$$\lim_{n\to+\infty} \| B_n(f_m) - f_m \| = 0$$

定理证毕。

习　　题

1. 设X, Y∈R^2,证明

$$\langle X, Y\rangle = \frac{|X+X|^2-|X-Y|^2}{4}$$

2. 设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $Y=(y_1, y_2 \cdots, y_n)$ 是R^n内任意两点。定义$R^n\times R^n$到R^1的函数

$$d_\infty(X,Y)=\max_{1\leq i\leq n}(|x_i-y_i|)$$

与

$$d_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

证明d_∞与d_1均为R^n的一种距离（非 Euclid 距离），并且它们与Euclid距离d之间有如下关系

$$d_\infty(X, Y)\leqslant d(X,Y)\leqslant d_1(X,Y)\leqslant nd_\infty(X, Y)$$

3. 证明在R^n内距离对于平移是不变的，即有

$$d(X+\alpha, Y+\alpha)=d(X, Y) \qquad (\alpha\in R^n)$$

4. 设$\{p_n\}$是$(R^n; d)$内的一个Cauchy 序列，其中d是Euclid距离。证明$\{p_n\}$也是空间$(R^n; d_\infty)$和$(R^n; d_1)$的Cauchy序列。反之亦然。

5. $(R^2; d)$，$(R^2; d_\infty)$，$(R^2; d_1)$内的单位圆各由什么样的点组成?

6. 设$B=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$和$B'=\{e'_1, e'_2,\cdots, e'_n\}$分别是$R^n$的两个基，并设$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\xi'_i e'_i$

定义范数

$$\|X\|_B=\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|,\qquad \|X\|_{B'}=\max_{1\leq i\leq n}|\xi'_i|$$

证明范数$\|X\|_B$与范数$\|X\|_B'$等价。即存在$A>0$及$C>0$使

$$A\|X\|_B'\leqslant\|X\|_B\leqslant C\|X\|_B'$$

7． 设E'是E的极限点全体。证明E'与$\bar{E}$均为闭集，并且它们有相同的极限点。

8． 设A_1，A_2，…是某度量空间的可数个子集族。证明

a） 若$B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bar{B}_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i$ 。

b） 若$B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，则$\bar{B}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$ 。

9． 设A、B为某度量空间的两个任意子集。证明

$$\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$$

并举例说明，严格的包含关系是有可能出现的。

10． 任何一个开集E（$\subset R^n$）的点都是E的极限点吗？对于闭集F（$\subset R^n$）的点呢？

11． 设X是无穷集。定义$X\times X$到R^1内的函数d如下：

$$d(p,q)=\begin{cases}0, & p\text{若}=q\\ 1, & \text{若}p\neq q\end{cases}$$

证明d是X的一个距离。（X；d）的哪些子集是开的？哪些子集是闭的？哪些子集是紧的？

12． 若d是X的一个距离，证明

$$\sigma(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\qquad(x,y\in X)$$

也是X的一个距离。

（注：若a，b为非负实数，且$b\geqslant a$，则有

$\frac{b}{1+b} \geqslant \frac{a}{1+a}$。）

13. 设d_i（$1 \leqslant i \leqslant 5$）都是$R^1 \times R^1 \longrightarrow R^1$ 的函数，它们具体的定义如下：

$$d_1(x,y) = (x-y)^2;$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|};$$
$$d_3(x,y) = |x^2-y^2|;$$
$$d_4(x,y) = |x-2y|;$$
$$d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

对上述各个函数d_i，试确定何者是R^1上的距离，何者不是。

14. 无限多个开集的交是否还是开集？无限多个闭集的并是否还是闭集？请举例说明。

15. 设E是度量空间，函数f：$E \to R^1$为连续。证明

a）集$A = \{x: f(x) \geqslant 0, x \in E\}$

$B = \{x: f(x) \leqslant 0, x \in E\}$

$C = \{x: f(x) = 0, x \in E\}$

均为闭集。

b）集$D = \{x: f(x) < 0, x \in E\}$

$H = \{x: f(x) > 0, x \in E\}$

$I = \{x: f(x) \neq 0, x \in E\}$；

均为开集。

（注：例如考察$A = f^{-1}([0, +\infty))$。

16. 设集E是由实数序列$x = \{\xi_n\}$所构成，并且假定当$n \to +\infty$时都有$\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = 0$。对$x = \{\xi_n\} \in E$，$y = \{\eta_n\} \in E$，置

$$d(x, y) = \sup_{n \in N} |\xi_n - \eta_n|$$

及

$$x + y = \{\xi_n + \eta_n\}, \quad \alpha x = \{\alpha \xi_n\}$$

证明

a) E是向量空间，d是E上的一种距离，从而$(E; d)$是度量空间。

b) $(E; d)$是完备的。

17. 如果X的每一个点不是E的点就是E的极限点（或两者都是），则称集E在X内稠密。若f和g是度量空间X到度量空间内Y的两个连续映射，并且E在X内稠密。证明

a) $f(E)$在$f(X)$内稠密。

b) 若对每一个$p \in E$有$g(p) = f(p)$，则对一切$p \in X$有$g(p) = f(p)$。

18. 设E是$\mathbb{R}^1$的紧子集。证明实值函数$f: E \to \mathbb{R}^1$为连续的充分必要条件是它的图形是$\mathbb{R}^2$的一个紧集。

19. 设f是度量空间X到度量空间Y内的一个一致连续映射。证明对X内的每一个Cauchy序列$\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$也是Y的一个Cauchy序列。

20. 设E是$\mathbb{R}^1$的有界子集，$f: E \to \mathbb{R}^1$在E上一致连续。证明f在E上有界。

21. 设A、B为度量空间X内的两个不相交非空闭集。定义

$$f(p) = \frac{d(p, A)}{d(p, A) + d(p, B)} \quad (p \in X)$$

证明f是X上的连续函数，它的值域含在$[0,1]$内并且当$p \in A$时，$f(p) = 0$；当$p \in B$时，$f(p) = 1$。令$V = f^{-1}\{[0, \frac{1}{2})\}$，$W = f^{-1}\{(\frac{1}{2}, 1]\}$。证明$V$，$W$是两

个不相交的开集，并且$A\subset V$，$B\subset W$。

22. 证明f在度量空间S上连续当且仅当在每一个S的紧子集上，f是连续的。

23. 直接从定义出发，证明R^1的子集$\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$是紧集。

24. 若S是度量空间X的闭集，T是X的紧集。证明$S\cap T$是紧集。

25. 设X是紧度量空间，$\mathscr{G}=\{G_\alpha\}$是X的一个开覆盖，则存在正数ρ(称为Lebesgue数)使对X中每一个直径小于ρ的子集B至少包含在某个G_α中。

26. 取

$$T_x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)\qquad x\in[1,+\infty)$$

证明T是具有压缩系数$K=\frac{1}{2}$的一个压缩映射。并且有不动点为$p=\sqrt{2}$。若取$p_0=1, p_n=Tp_{n-1}$ ($n=1,2,\cdots$)。证明

$$|p_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$$

27. 设S为完备的度量空间。若存在正整数r，使

$$F=\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{r}=f^r$$

成为压缩映射。证明f亦有唯一的的不动点。

第五章　微分和可微映射

§1　预备知识

1.1　向量值函数

设S是R^n的一个子集。映射$F: S \to R^m$称为向量值函数。

设$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$，$Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m) \in R^m$，若设$Y=F(X)$为$S$到$R^m$内的向量值函数，那么$Y$的每一个分量$y_i$（$1 \leqslant i \leqslant m$）一般都是$X$的函数。换言之，是$n$个变元$x_1$，$x_2$，……，$x_n$ 的函数。故有

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

设X_0与u是R^n内的两个向量，并且$u \neq 0$．假定实数λ在R^1的某个包含原点的区间I内变化，则

$$\varphi: \lambda \longmapsto X_0 + \lambda u$$

便是I到R^n内的一个映射。象集$\varphi(I)$称为R^n内通过X_0且以u为方向的线段。

1.2　线性变换及其矩阵

定义　设L是R^n到R^m内的映射，并且对任意的$X \in R^n$，$Y \in R^n$以及任意的实数α，等式

$$L(X+Y) = L(X) + L(Y) \text{ 及}$$

$$L(\alpha X)=\alpha L(X)$$

成立，则称L是线性的。

习惯上，我们把R^n到R^n的线性映射称为R^n到R^n内的一个线性变换。

设$L: R^n \longrightarrow R^m$是线性变换；$e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$是$R^n$的一组标准正交基；$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots\cdots, \bar{e}_m$是$R^m$的一组标准正交基；$X=x_1e_1+x_2e_2+\cdots\cdots+x_ne_n$是$R^n$的任意一个向量。令$Y=L(X)=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+\cdots\cdots+y_m\bar{e}_m$

由于L是线性的，所以有

$$L(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kL(e_k)$$

因为$L(e_k)\in R^m$，故不妨设$L(e_k)=\sum_{i=1}^{m}t_{ik}\bar{e}_i$，$(1\leqslant k\leqslant n)$，从而有

$$Y=L(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k\left(\sum_{i=1}^{m}t_{ik}\bar{e}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k\right)\bar{e}_i \qquad (1)$$

今构造$m\times n$矩阵$A[L]$，它的第k列元素由$L(e_k)$在R^m中关于$\bar{e}_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$的坐标组成，即

$$A[L]=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mk} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}=(t_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\1\leqslant k\leqslant n}}$$

这样一来，(1)便可以表示成如下的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A(L) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

矩阵$A(L)$完全决定了线性变换L，我们称$A(L)$为**线性变换L的矩阵**。

例 记复数的全体为**C**，$A=a+bi$为确定的复数。定义**C**到**C**内的映射ψ_A为$\psi_A(z)=A\cdot z$，其中$z=x+yi$是复变量。把**C**与$\mathbf{R}^2$等同，容易验证ψ_A是一个线性变换。为了确定这个线性变换的矩阵必须计算**C**中两个标准正交向量1与i在此映射下的象。但

$$\psi_A(1)=a+bi$$
$$\psi_A(i)=-b+ai$$

所以ψ_A的矩阵为

$$A(\psi_A)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

记**C**中元素$h=h_1+h_2i$为2×1矩阵$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$，那么把映射$\psi_A(z)=u+vi$写成矩阵形式即为

$$\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1.3 线性变换的复合

设$L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$与$T:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p$为两个给定的线性变换。$L$与$T$的复合$T\circ L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$显然也是一个线性变换。

设：

$$A[L]=(l_{kj})_{\substack{1\le k\le m\\1\le j\le n}}$$

$$A[T]=(t_{ik})_{\substack{1\le i\le p\\1\le k\le m}}$$

并设u_1，u_2，…，u_n是R^n的一组标准正交基；v_1，v_2…，v_m是R^m的一组标准正交基；w_1，w_2，…w_p是R^p的一组标准正交基。于是

$$L(u_j)=\sum_{k=1}^{m}l_{kj}v_k \qquad (1\leqslant j\leqslant n)$$

$$T(v_k)=\sum_{i=1}^{p}t_{ik}w_i \qquad (1\leqslant k\leqslant m)$$

$$(T\circ L)(u_j)=\sum_{k=1}^{m}l_{kj}T(v_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(l_{kj}\sum_{i=1}^{p}t_{ik}w_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{m}t_{ik}l_{kj})w_i \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

故$A[T\circ L]$是一个$p\times n$矩阵，其第i行第j列的元素是$\sum_{k=1}^{m}t_{ik}l_{kj}$，即有

$$A[T\circ L]=A[T]\cdot A[T] \qquad (2)$$

1.4 空间$L(R^n, R^m)$

我们将用$L(R^n, R^m)$表示由所有R^n到R^m内的线性变换组成的向量空间，其中加法和数乘规定如下：

i) 加法：若A，B$\in L(R^n, R^m)$，则定义A+B为

$$(A+B)(X)=A(X)+B(X),\ (X\in R^n)$$

ii) 数乘：若A$\in L(R^n, R^m)$，$\alpha\in R^1$，则定义

αA为

$$(\alpha A)(X)=\alpha A(X)$$

定理1 设$T\in L(R^n, R^m)$，$(t_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$为线性变换T的矩阵，则对每一个$X\in R^n$，有

$$|T(X)|\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^2\right\}^{1/2}|X| \qquad (3)$$

证明 设

$$X=\sum_{j=1}^{n}x_je_j,\qquad Y=T(X)=\sum_{j=1}^{n}x_jT(e_j)$$

由于 $T(e_j)=\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\bar{e}_i$ $(1\leqslant j\leqslant n)$，所以

$$Y=T(X)=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\bar{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j\right)\bar{e}_i$$

$$|T(X)|^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^2\cdot\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^2\right)\cdot|X|^2$$

两边开平方，得

$$|T(X)|\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^2\right\}^{1/2}\cdot|X|$$

定义 设$T\in L(R^n, R^m)$，$(t_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$为线性变换T的矩阵。称

$$\|T\|=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}^2\right\}^{1/2}$$

为T的范数。

由此可知，若T是R^n到R^m内的一个线性变换，则必有$\|T\|<+\infty$，并且由定理的结论可以看出，任何一个R^n到R^m内的线性变换必是R^n上的一个一致连续映射。

§2　方向导数与偏导数

2.1　方向导数

设D是R^n的一个开子集，F是D到R^m内的一个向量值函数。

定义　设$X_0\in D$，$u\in R^n$且$|u|=1$，$\lambda\in R^1$，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(X_0+\lambda u)-F(X_0)}{\lambda}$$

存在，则称此极限为F在X_0的u方向导数，并记作$D_uF(X_0)$。

设$F(X)=(f_1(X), f_2(X), \cdots, f_m(X))$，其中$f_i$（$1\leqslant i\leqslant m$）为$D$到$R^1$内的实值函数，于是有

$$D_uF(X_0)=\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{f_1(X_0+\lambda u)-f_1(X_0)}{\lambda},\right.$$

$$\left.\cdots, \frac{f_m(X_0+\lambda u)-f_m(X_0)}{\lambda}\right)$$

$$=(D_uf_1(X_0), D_uf_2(X_0), \cdots, D_uf_m(X_0))$$

由此可见，向量值函数$F: R^n\to R^m$的方向导数是一个m维向量，它的第i个分量是n元实值函数$f_i(X)=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在$X_0$的u方向导数。后者在微积分教程中已经研究过。

2.2　偏导数

多元实值函数关于坐标方向的导数即为偏导数。我们把

这个概念推广到向量值函数上去。

定义 设D是R^n的一个开子集，F是D到R^m内的向量值函数，$F(X)$的分量为$f_1(X)$，$f_2(X)$，…，$f_m(X)$，而e_k（$1\leq k\leq n$）是R^n的一组标准正交基。称$D_{e_k}F(X_0)$为$F(X)$在X_0关于第k个变量的偏导数，并改写$D_{e_k}(X_0)$为$D_kF(X_0)$

由方向导数的定义，有

$$D_kF(X_0)=(D_kf_1(X_0),D_kf_2(X_0),\cdots\cdots,(D_kf_m(X_0))$$

所以多元向量值函数F：$R^n\to R^m$在X_0的偏导数$D_kF(X_0)$也是一个m维向量，它的第i个分量是多元实值函数$f_i(X)=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$X_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0)$关于第$k$个变量的偏导数。

当$n=1$时，F有形式为$F(X)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$。此时$D_1F(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\cdots\cdots,f_m'(x_0))$，其中$x_0\in D=(a,b)$，此即单变量向量值函数的导数。

2.3 方向导数、偏导数存在与函数连续之关系

i) 各个方向导数都存在，显然偏导数也存在；但各个偏导数存在不能保证各个方向导数都存在。

例1 考察f：$R^2\to R^1$：

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{若}x=0\text{或}y=0\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$$

显然有$D_1f(0,0)=D_2f(0,0)=1$，但若取$u=(a_1,a_2)$，其中$a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$，则$D_uf(0,0)$均不存在，因为此时当$\lambda\to 0$时，式

$$\frac{f(0+\lambda u)-f(0)}{\lambda}=\frac{f(\lambda u)}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$

不存在极限。

ii） 显然函数连续不一定在每个方向都存在导数；反过来，每个方向的导数存在，函数也未必连续。

例 2 考察

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & 若x\neq 0\\ 0, & 若x=0\end{cases}$$

这是R^2到R^1内的函数。令$u=(a_1, a_2)\neq 0$为R^2的一个向量，则有

$$\frac{f(0+\lambda u)-f(\theta)}{\lambda}=\frac{f(\lambda u)}{\lambda}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_1a_2^2}{a_1^2+\lambda^2a_2^4} & 若a_1\neq 0\\ 0 & 若a_1=0\end{cases}$$

即对任何方向$u\neq 0$，$D_uf(0, 0)$存在，但易证$f(x,y)$在$(0, 0)$不连续（例如沿(x^2, x)方向趋近于$(0,0)$）

§3 微 分

3.1 微分的定义

让我们先复习一下微积分中关于微分的定义。

设(a, b)是一维区间，$f(x)$是定义在(a, b)上的实值函数。如果存在常数A使函数$f(x)$在x_0的增量$f(x_0+h)-f(x_0)$有一个线性的主部

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A\cdot h+r(h) \qquad (1)$$

则谓f在x_0可微，其中当$h\to 0$时，有$\frac{r(h)}{h}\to 0$，主部

$A\cdot h$称为f在x_0的微分，可以证明，函数f在x_0可微必在x_0可导，而且$f'(x_0)=A$，反之亦然。

当我们欲把（1）直接推广到向量值函数$F: D(\subset R^n)\longrightarrow R^m$时立即发生了困难。因为（1）的左边是$m$维向量，而右式的$h$是$n$维向量。这个等式应作如何理解才便于推广呢？

然而我们看到，$f:(a,b)\to R^1$在$x\in(a,b)$的微分不仅依赖于x而且与h有关。但当x确定时，映射$h\longmapsto f'(x)\cdot h$便是$R^1$到$R^1$内的线性变换。如果把这个线性变换记为$Df(x)$，那么便有

$$[Df(x)](h)=f'(x)\cdot h$$

所以如果f在x可微，这就表示与x对应存在一个线性变换

$$Df(x): h\longmapsto f'(x)\cdot h$$

使f在x的增量$f(x+h)-f(x)$与这个线性变换在h的值相差一个比h更高级的无穷小。为了把微分概念推广到向量值函数，我们不仅有理由而且也有必要把上述这个线性变换定义为f在x的微分。这样一来，我们可以把定义在一维区间(a,b)上的实函数f在$x\in(a,b)$可微的定义重新理解如下：

定义 设f是(a,b)上的实值函数。若对$x\in(a,b)$，存在R^1到R^1的一个线性变换λ，使等式

$$f(x+h)-f(x)=\lambda(h)+r(h)$$

成立，其中$r(h)/h$当$h\to 0$时趋于零，则称f在x可微，并称线性变换λ为f在x的微分。通常记这个线性变换为$Df(x)$

这个定义与以前关于可微的定义是等价的，然而却为我们把微分的概念推广到向量值函数提供了方便。

定义 设D是R^n的一个开子集。F是D到R^m的一个映射，

$X\in D$，$h\in R^n$，$X+h\in D$，若存在R^n到R^m内的线性变换λ使

$$\lim_{h\to 0}\frac{|F(X+h)-F(X)-\lambda(h)|}{|h|}=0 \qquad (2)$$

则称F在X可微，并称此线性变换λ为F在X的微分。其中出现的$|\cdot|$都是相应空间的 Euclid 范数。记此线性变换λ为$DF(X)$。

我们也可以把（2）写成与（1）类似的形式，因此，如果存在R^n到R^m内的线性变换λ使等式

$$F(X+h)-F(X)=\lambda(h)+r(h) \qquad (2')$$

成立，则谓F在X可微，其中$r(h)$是R^m中的向量，满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}=0$$

如果F在D内每一点可微，则谓F在D内可微。

例 1　设L是R^n到R^m内的线性变换，$X\in R^n$，则$DL(X)=L$

证明　因为L是线性变换，故有

$$L(X+h)-L(X)=L(h)$$

按定义L在X可微，并且$DL(X)=L$。

定理 1　若F在X可微，则它的微分是唯一的。

证明　设R^n到R^m内的线性变换A和B都是F在X的微分。于是有

$$F(X+h)-F(X)=A(h)+r_1(h)$$

$$F(X+h)-F(X)=B(h)+r_2(h)$$

其中当$h\to 0$时，有$\frac{|r_1(h)|}{|h|}\to 0$，$\frac{|r_2(h)|}{|h|}\to 0$，

考察线性变换$C=A-B$，则有

$$C(h)=r_2(h)-r_1(h)$$

若$A\neq B$，则存在R^n的非零向量Y，使$C(Y)\neq 0$，即有

$$\frac{|C(\lambda Y)|}{|\lambda Y|}=\frac{|C(Y)|}{|Y|}\neq 0$$

故

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{|C(\lambda Y)|}{|\lambda Y|}\neq 0$$

但这与

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{|C(\lambda Y)|}{|\lambda Y|}\leqslant\lim_{\lambda\to 0}\frac{|r_1(\lambda Y)|+|r_2(\lambda Y)|}{|\lambda Y|}$$

$$=0$$

矛盾。因此必须$A=B$

3.2 可微性与连续性以及与方向导数存在性之间的关系

定理 3 若F在X可微，则F在X连续。

证明 因F在X可微，故存在R^n到R^m内的线性变换$DF(X)$，使

$F(X+h)-F(X)=[DF(X)](h)+r(h)$，其中当$h\to 0$时，$\frac{|r(h)|}{|h|}\to 0$故不妨假设$|r(h)|=\varepsilon\cdot|h|$，其中$\lim\limits_{|h|\to 0}\varepsilon=0$，因而有

$$\begin{aligned}|F(X+h)-F(X)|&\leqslant|[DF(X)](h)|\\&\quad+|r(h)|\leqslant\|DF(X)\|\cdot|h|+\varepsilon|h|\\&=|h|(\|DF(X)\|+\varepsilon)\to 0\end{aligned}$$

定理 4 设$F:D\to R^m$在$X\in D$可微，其中D是R^n的一个开子集，则F在X关于任何$u(|u|=1)$方向的导数$D_uF(X)$存在，并且有

$$D_u F(X) = [DF(X)](u) \qquad (3)$$

证明 因为F在X可微，故有

$$F(X+\lambda u)-F(X)$$
$$=[DF(X)](\lambda u)+r(\lambda u)$$
$$=\lambda[DF(X)](u)+r(\lambda u)$$

所以

$$\frac{F(X+\lambda u)-F(X)}{\lambda}$$

$$=[DF(X)](u)+\frac{r(\lambda u)}{\lambda} \qquad (4)$$

因为

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{r(\lambda u)}{\lambda}\right| = \lim_{\lambda\to 0}\frac{|r(\lambda u)|}{|\lambda u|} = 0$$

所以当λ趋近零时，(4)右端极限存在且等于$[DF(X)](u)$，而左边的极限即为F在X关于u方向导数$D_u F(X)$

推论 若$F: D\to R^m$在$X\in D$可微，则F在X的各个偏导数都存在，并且有

$$D_k F(X) = [DF(X)](e_k) \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

例2 众所周知，如果二元实函数$f(x, y)$在$P_0=(x_0, y_0)$的偏导数$D_1 f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$与$D_2 f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$都是连续的，则$f$在$(x_0, y_0)$可微并且有

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot h_1$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot h_2+0(h)，其中h=(h_1, h_2)且$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{O(h)}{|h|}=0.$$

我们用这个例子来验证推论之正确性。事实上，上式可以改写成矩阵形式：

$$\begin{aligned}&f(x_0+h_1,\ y_0+h_2)-f(x_0,\ y_0)\\&=f(P_0+h)-f(P_0)\\&=[D_1f(P_0),\ D_2f(P_0)]\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+o(h)\end{aligned}$$

所以 $[D_1f(P_0),\ D_2f(P_0)]$ 是 f 在 P_0 的微分 $Df(P_0)$ 所代表的矩阵。容易看，出设 $e_1=(1,\ 0)$，$e_2=(0,\ 1)$ 为 R^2 的两个互为正交的标准向量，则有

$$D_1f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=[Df(P_0)](e_1)$$

$$D_2f(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=[Df(P_0)](e_2)$$

例3 设 $f: D(\subset R^n)\to R^1$ 为 n 元实值函数。假定它在 $X\in D$ 可微，而 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 R^n 的一组标准正交基，$u=\sum_{k=1}^{n}u_ke_k$ 是 R^n 的任意一个向量。设 $Df(X)$ 是 f 在 X 的微分。于是由 $Df(X)$ 的线性，有

$$\begin{aligned}[Df(X)](u)&=\sum_{k=1}^{n}[Df(X)](u_ke_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}u_kDf(X)(e_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}u_kD_kf(X)\\&=\langle\nabla f(X),\ u\rangle \qquad (5)\end{aligned}$$

其中 $\nabla f(X)=(D_1f(X),\ D_2f(X),\ \cdots, D_nf(X))$ 称为

f在X的梯度。它是f在X处变化最快的方向。式(5)说明，多元实值函数f在X的微分关于u的值等于f在X的梯度与u的内积。特别当$u=(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_n)$时$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1\right)$，(5)的左端即为$f$在X的u方向导数，所以有

$$D_u f(X) = [Df(X)](u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\cdot\cos\alpha_i$$

3.3 $DF(X)$的矩阵(Jacobian矩阵)

设$F: D(\subset R^n)\to R^m$在X可微，其中D是R^n的一个开子集。我们来计算微分$DF(X)$的矩阵。

设$F=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$，其中每一个$f_i$，($1\leqslant i\leqslant m$)都是$D$上的实值函数，并设 $\{e_i\}_{(i=1,2,\ldots,n)}$与$\{\bar{e}_j\}_{(j=1,2,\ldots,m)}$分别为$R^n$与$R^m$的两组标准正交基。因为

$$[DF(X)](e_k) = D_kF(X) = (D_kf_1(X), D_kf_2(X), \cdots, D_kf_m(X)) = \sum_{j=1}^{m} D_kf_j(X)\bar{e}_j$$

$$(1\leqslant k\leqslant n) \qquad (6)$$

故由§1之1.2，得线性变换$DF(X)$之矩阵为

$$A[DF(X)] = \begin{pmatrix} D_1f_1(X) & D_2f_1(X) & \cdots & D_nf_1(X) \\ D_1f_2(X) & D_2f_2(X) & \cdots & D_nf_2(X) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_m(X) & D_2f_m(X) & \cdots & D_nf_m(X) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

或

$$A[D^F(X)]=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X)\end{pmatrix}\qquad(8)$$

矩阵（7）或（8）称为F在X的Jacobian矩阵，或称为F在X的导数，并记成F′（X）。它是一个$m\times n$矩阵（这里我们不妨再强调一下，F的微分是一个线性变换，而此线性变换的矩阵F′（X）是F的导数）。用矩阵来表示线性变换有时会给我们带来很多方便。设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$。我们约定，如果把X看作矩阵，在不作特别的声明之下总是理解为$n\times 1$矩阵。

例4　求向量值函数$F(x,y)=(\sin x\cos y,\sin x\sin y,\cos x\cos y)$的Jacobian矩阵。

解　设$F=(f_1,f_2,f_3)$，其中

$$f_1(x,y)=\sin x\cos y$$

$$f_2(x,y)=\sin x\sin y$$

$$f_3(x,y)=\cos x\cos y$$

故有

$$F'(X)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y & -\sin x\sin y\\ \cos x\sin y & \sin x\cos y\\ -\sin x\cos y & -\cos x\sin y\end{pmatrix}$$

例5 复变函数$F(z)=z^2$可以看成是R^2到R^2内的映射$F(X)$。通过简单的计算知$F(X)$的两个分量为

$$f_1=x_1^2-x_2^2, \qquad f_2=2x_1x_2$$

其中$X=(x_1, x_2)$，它与$z=x_1+x_2 i$等同。从而有

$$F'(X)=\begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

设$h=(h_1, h_2)=h_1e_1+h_2e_2$，则有

$$[DF(X)](h)=\langle\nabla f_1(X), h\rangle e_1+\langle\nabla f_2(X), h\rangle e_2,$$

用矩阵表示即为

$$2\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

由1.2之例。(*)所对应的变换即为$2(x_1+x_2 i)\cdot H$，($H=h_1+h_2 i$)，所以映射$F(z)=z^2$在点z的微分便是"用复数$2z$相乘"的线性变换。

3.4 链法则

这一节研究可微函数的复合映射及其微分公式。

定理5 设D是R^n的开子集；$G: D\longrightarrow R^p$在$X\in D$可微；E是R^p的开子集，$G(D)\subset E$；而$F: E\longrightarrow R^m$在$u=G(X)$可微，则复合映射$Y=F\circ G$在X可微，并且有

$$D(F\circ G)(X)=DF(G(X))\circ DG(X) \qquad (1)$$

或写成矩阵形式有

$$(F\circ G)'(X)=F'(G(X))\cdot G'(X) \qquad (2)$$

证明 设

$$G(X+h)-G(X)-[DG(X)](h)=r_1(h) \quad (h\in R^n)$$

$$F(u+K)-F(u)-[DF(u)](K)=r_2(K)\quad(K\in R^p)$$

其中$|r_1(h)|/|h|\longrightarrow 0\ (h\to 0)$，$|r_2(K)|/|K|\to 0(K\to 0)$

因此将它们改写为

$$|r_1(h)|=|h|\cdot|\varepsilon_1(h)|,$$
$$|r_2(K)|=|K|\cdot|\varepsilon_2(K)|$$

其中有

$$\lim_{h\to 0}|\varepsilon_1(h)|=0,\quad \lim_{k\to 0}|\varepsilon_2(K)|=0$$

给定h，置$C=G(X+h)-G(X)$，由定理3，当$h\to 0$时，有$C\to 0$，而

$$\begin{aligned}|C|&=|G(X+h)-G(X)|\leqslant|[DG(X)](h)|\\&+|r_1(h)|\leqslant\|DG(X)\|\cdot|h|+|h|\cdot|\varepsilon_1(h)|\\&=(\|DG(X)\|+|\varepsilon_1(h)|)\cdot|h|\end{aligned}$$

考察

$$\begin{aligned}&Y(X+h)-Y(X)-[DF(u)\circ DG(X)](h)\\&=F(u+C)-F(u)-[DF(u)\circ DG(X)](h)\\&=[DF(u)](C)+r_2(C)-[DF(u)\circ DG(X)](h)\\&=[DF(u)](C)-[DG(X)](h)+r_2(C)\\&=[DF(u)](r_1(h))+r_2(C)\end{aligned}$$

因而对$h\neq 0$，有

$$\frac{|Y(X+h)-Y(X)-[DF(u)\circ DG(X)](h)|}{|h|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|h|}|[DF(u)](r_1(h))|+\frac{1}{|h|}|r_2(C)|$$

$$\leqslant\|DF(u)\|\cdot|\varepsilon_1(h)|+\frac{|C|\cdot|\varepsilon_2(C)|}{|h|}$$

$$\leqslant\|DF(u)\||\varepsilon_1(h)|+(\|DG(X)\|+|\varepsilon_1(h)|)|\varepsilon_2(C)|$$

最后一个不等式的右边当$|h|\to 0$时趋于零，从而得

$$[D(F\circ G)](X)=DF[G(X)]\circ DG(X)$$

用矩阵表示，有

$$(F\circ G)'(X)=F'(G(X))\cdot G'(X)$$

令$u=G(X)$的分量为$u_i=g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$(1\leqslant i\leqslant p)$，

$Y=F(u)$的分量为$y_j=f_j(u_1, u_2\cdots, u_p)$

$(1\leqslant j\leqslant m)$，

由（2），有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

例 6　设$G: R^3\to R^2$的分量为

$u_1=g_1(x_1, x_2, x_3)$

$$u_2 = g_2(x_1, x_2, x_3)$$

F：$R^2 \to R^3$的分量为

$$y_1 = f_1(u_1, u_2)$$
$$y_2 = f_2(u_1, u_2)$$
$$y_3 = f_3(u_1, u_2)$$

则有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

因而如果欲求y_1关于x_1，x_2，x_3的偏导数，可按上式右端两矩阵相乘而求得。例如

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}$$

同样可以求出y_2，y_3关于x_1，x_2，x_3的偏导数。

例7 设

$$u=f(x, y)$$
$$v=g(x, y, u)$$
$$w=h(x, u, v)$$

试求$\frac{\partial w}{\partial x}$与$\frac{\partial w}{\partial y}$

解 映射$(x, y)\longmapsto w$可以看成是如下三个映射的复合：

第一个映射F：$(x, y)\longmapsto(x, y, u)$，它的三个分量是

$$f_1(x, y)=x$$
$$f_2(x, y)=y$$
$$f_3(x, y)=f(x, y)$$

此映射是可微的，其Jacobian矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

第二个映射是G：$(x, y, u)\longmapsto(x, u, v)$，它的三个分量是

$$g_1=x$$
$$g_2=u$$
$$g_3=g(x, y, u)$$

此映射的Jacobian矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix}$$

第三个映射是h：$(x, u, v) \longmapsto w$，其表达式为

$$w = h(x, u, v)$$

其Jacobian矩阵为

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}\right]$$

故按复合映射的链法则有

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right), \right.$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

故得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial g} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3.5 C^1类映射

设D是R^n的开子集，F：$D\to R^m$是D上的可微映射。于是对每一个$X\in D$，都对应一个线性变换$DF(X)\in L(R^n, R^m)$，让X遍历D，$DF(X)$也可以看成是D到$L(R^n, R^m)$内的映射。谓此映射是连续的，当且仅当对每一个$X\in D$和每一个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$Y\in D$并且$|X-Y|<\delta$时，有

$$\| DF(X)-DF(y)\|<\varepsilon$$

成立。

定义 设D是R^n的开子集，F：$D\to R^m$是D上的可微映射。如果$DF(X)$是D到$L(R^n, R^m)$内的连续映射，则称F是D上的连续可微映射。D上的连续可微映射称为$C^1(D)$类映射。

定理6 设D是R^n的开子集，F：$D\to R^m$的分量为f_1，f_2，…，f_m，则$F\in C^1(D)$当且仅当F的每一个偏导数$D_k f_j(X)$ $(1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$在$D$内连续。

证明

必要性：设$F\in C^1(D)$，由3.3之公式(6)有

$$[DF(X)](e_k)=\sum_{i=1}^{m} D_k f_i(X)\bar{e}_i \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

两边对$\bar{e}_j$作内积，并由$\{\bar{e}_i\}$的标准正交性得

$$D_k f_j(X)=\langle [DF(X)](e_k),\ \bar{e}_j\rangle \quad \begin{pmatrix}1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m\end{pmatrix} \qquad (1)$$

因而

$$\begin{aligned}&D_k f_j(X)-D_k f_j(Y)\\ &=\langle [DF(X)](e_k)-[DF(Y)](e_k),\ \bar{e}_j\rangle\\ &=\langle [DF(X)-DF(Y)](e_k),\ \bar{e}_j\rangle\end{aligned}$$

所以由定理1有

$$|D_k f_j(X)-D_k f_j(Y)|\leqslant|[DF(X)-DF(Y)](e_k)|\cdot|e_j|\leqslant\|DF(X)-DF(Y)\|\cdot|e_k|\cdot|e_j|=\|DF(X)-DF(Y)\|$$

充分性：设F的每一个偏导数$D_k f_j$在D内连续。如果每一个f_j（即F的第j个分量）可微，显然F也可微。故不妨假定$m=1$，此时F（X）成为D到R^1的映射，改记F(X)为$f(X)$，于是对每一个$k(1\leqslant k\leqslant n)$，$D_k f$连续，设$X_0$为$D$内任意一点，$\varepsilon>0$为事先给出的任意实数。因为$D$是$R^n$的开子集，而$D_k f$又是连续的，故存在$X_0$的球形邻域$O(X_0;r)\subset D$，当$|h|<r$时，有

$$|D_k f(X_0+h)-D_k f(X_0)|<\frac{\varepsilon}{n},\qquad(1\leqslant k\leqslant n)$$

令

$$X_0=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i,\qquad h=\sum_{i=1}^{n}h_i e_i$$

于是

$$\begin{aligned}&f(X_0+h)-f(X_0)\\&=f(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=[f(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2+h_2,\\&\quad\cdots,x_n+h_n)]+[f(x_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)\\&\quad-f(x_1,x_2,x_3+h_3,\cdots,x_n+h_n)]+\cdots\cdots\\&\quad+[f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1,x_2,\\&\quad\cdots,x_{n-1},x_n)]\\&=D_1f(x_1+\theta_1h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)\cdot h_1\\&\quad+D_2f(x_1,x_2+\theta_2h_2,\cdots,x_n+h_n)\cdot h_2\\&\quad+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$+D_nf(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n+\theta_n h_n)\cdot h_n$$

其中$0<\theta_i<1$　　$(1\leqslant i\leqslant n)$，又因为

$$|D_kf(x_1,x_2,\cdots,x_k+\theta_k h_k,\cdots,x_n+h_n)$$
$$-D_kf(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n)|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}$$

所以

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\sum_{i=1}^{n}D_if(X_0)\cdot h_i+r(h)$$

$$=\langle\nabla f(X_0), h\rangle+r(h)$$

其中$|r(h)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}|h_i|\leqslant\varepsilon\cdot|h|$，从而$\frac{|r(h)|}{|h|}\to0\ (|h|\to0)$，而$\langle\nabla f(X_0), h\rangle$是$R^n$到$R^1$的线性变换，按定义$f$在$X_0$可微。由$X_0$的任意性知$f$在$D$内可微。

此外，由于线性变换$Df(X)$的矩阵是

$$[D_1f(X), D_2f(X), \cdots, D_nf(X)],$$

所以由§1之1.4，有

$$\|Df(X)\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}[D_if(X)]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

而不等式右端之每一个$D_if(X)$在D内连续，所以由

$$\|Df(X)-Df(Y)\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}[D_if(X)-D_if(Y)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

推得f是连续可微映射。

§4　隐函数存在定理及其应用

我们知道，一个函数（例如一元函数）它可以用显式$y=f(x)$来表示，也可以用隐式$F(x, y)=0$来表示，

其中F是$R^1\times R^1$的某个开子集A到R^1内的一个映射。

现在我们要问，随意给出$A\subset(R^1\times R^1)$到R^1的一个映射F，$F(x, y)=0$是否表示一个函数？回答当然是不能肯定的。然而在一定的条件下，我们可以给这个问题以一个确定的回答。

这个问题的一般提法是：

设A是$R^m\times R^n$的一个开子集，$F: A\to R^n$是一个映射。设$(X_0, Y_0)=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, y_1^0, \cdots, y_n^0)\in A$并且满足$F(X_0, Y_0)=0$，在$A$内是否存在$R^m\times R^n$的开区间$I_m\times J_n$（见第四章1.1），其中$I_m=\{X=(x_1,\cdots, x_m): |x^1-x_i{}^0|<h, (1\leqslant i\leqslant m)\}$，$J_n=\{Y=(y_1, \cdots, y_n): |y_j-y_j{}^0|<k, (1\leqslant j\leqslant n)\}$使对每一个$X\in I_m$，恒有唯一的$Y\in J_n$与之对应使$F(X,Y)=0$，如果这种对应关系存在，那么便确定了$I_m$到$J_n$内的一个映射。我们把它记为$Y=f(X)$，并称它为方程$F(X,Y)=0$在点$(X_0, Y_0)$的矩形邻域$I_m\times J_n$内所确定的隐函数。这时用$Y=f(X)$代入$F(X, Y)$便得$I_m$上的一个恒等式

$$F(X, f(X))\equiv 0$$

这一节我们要研究在什么样的条件下，方程$F(X,Y)=0$能在(X_0, Y_0)的某个矩形邻域$I_m\times J_n$内确定一个隐函数。由此可知，隐函数的存在问题是一个局部性的问题。

我们也可以用球形邻域$O_m(X_0; h)$，$O_m(Y_0; k)$分别代替问题中的矩形邻域I_m与J_n。

为使问题叙述方便，我们将问题分成两种情况，一种是$n=1$，一种是$n>1$，当$n=1$时，F便是$A(\subset R^m\times R^1)$到R^1的映射，即是A上的实函数。这时隐函数的存在问题称之为“由一个方程所确定的隐函数存在问题”；当$n>1$时，F便

是向量值函数，此时的隐函数存在问题便称为“由方程组所确定的隐函数存在问题”。

4.1 由一个方程确定的隐函数存在问题

设A是$\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^1$的一个开集，$F$是$A$到$\mathbf{R}^1$内的映射。由于$m>1$的证法与$m=1$的证法没有本质的不同，所以我们只对$m=1$的情况作出证明。

定理 7 设A是$\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$的开子集，$P_0=(x_0,\ y_0)\in A$，$F$是$A$到$\mathbf{R}^1$内的一个映射。假定$F$以及$D_1F$，$D_2F$都在$A$内连续，并且满足

$$F(x_0,\ y_0)=0\qquad D_2F(x_0,\ y_0)\neq 0$$

则

i）存在正数h和k，使矩形$R=\{(x,\ y):\ |x-x_0|<h,\ |y-y_0|<k\}\subset A$，并且对每一个$x\in I=\{x:\ |x-x_0|<h\}$，有唯一的$y\in J=\{y:\ |y-y_0|<k\}$满足$F(x,\ y)=0$，换言之，$F(x,\ y)=0$在$I\times J$内确定了一个隐函数$y=f(x)$。

ii）函数f和它的导数f'均在I内连续。

证明 对定理之 i）我们将给出两种证明。

i）**的第一种证明**：不妨假定$D_2F(x_0,\ y_0)>0$，因为不然，只要将F换成$-F$即可。

由于D_2F连续，所以在A内存在正方形$S=\{(x,\ y):\ |x-x_0|\leqslant k,\ |y-y_0|\leqslant k\}$，使对每一个$(x,y)\in S$，均有$D_2F(x_0,\ y_0)>0$。

对于每一个适合$|x-x_0|<k$的x，把它看作固定时，$F(x,\ y)$便是y的严格增加函数。又$F(x_0,\ y_0)=0$，所以有

$$F(x_0, y_0+k)>0 \quad 及 \quad F(x_0, y_0-k)<0$$

而F在S内连续，所以存在h，使在$I=\{x: |x-x_0|<h\}$上$F(x, y_0+k)>0$及$F(x, y_0-k)<0$，又F是y的

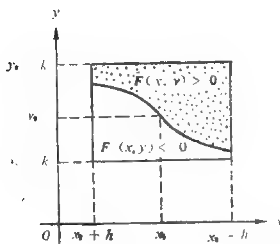

图 34

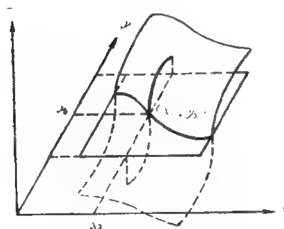

图 35

严格单调函数，所以对每个$x\in I$，必有而且只有一个$y\in J=\{y: |y-y_0|<k\}$与之对应使$F(x, y)=0$，这个对应便是所求的隐函数$y=f(x)$，其定义域包含I而值域含在J中。

i）的第二种证明：

令$C=D_1F(x_0, y_0)$，$D=D_2F(x_0, y_0)$，

并定义

$$\phi(x, y)=F(x, y)-C\cdot(x-x_0)-D\cdot(y-y_0)$$

于是有

$$D_1\phi(x_0, y_0)=D_1F(x_0, y_0)-C=0$$

$$D_2\phi(x_0, y_0)=D_2F(x_0, y_0)-D=0$$

由于$D\neq 0$，令

$$E=\frac{C_1}{D}, \qquad \psi(x,y)=\frac{\phi}{D}, \qquad G=\frac{F}{D}$$

故有

$$G(x, y)=(y-y_0)+E\cdot(x-x_0)+\psi(x, y)$$

因为$F\in \mathbf{C}^1$，故$G\in\mathbf{C}^1$，$\psi\in\mathbf{C}^1$，并且

$$\psi(x_0, y_0)=0$$

$$D_1\psi(x_0, y_0)=0$$

$$D_2\psi(x_0, y_0)=0$$

所以存在$k>0$使对每一个$(x, y)\in S=\{(x, y): |x-x_0|\leqslant k, |y-y_0|\leqslant k\}$ 有

$$|D_1\psi(x, y)|\leqslant 1/2, \quad |D_2\psi(x, y)|\leqslant 1/2$$

我们可以假定k是这样的小，它使S全包含在ψ的定义域中。对固定的$x\in I'=\{x: |x-x_0|\leqslant k\}$，定义$J=\{y: |y-y_0|\leqslant k\}$上的映射

$$T_x(y)=y_0-E\cdot(x-x_0)-\psi(x, y)$$

因而，对每一个$F(x, y)=0$的解，便是$G(x, y)=0$

的解，从而是$y=T_x(y)$的解。反之亦然。于是问题转化为对充分接近x_0的x，证明T_x存在不动点。

设$h\leqslant k$，及$|x-x_0|\leqslant h$，因为

$$
\begin{aligned}
|\psi(x,y)| &= |\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)| \leqslant |\psi(x,y) \\
&\quad -\psi(x_0,y)|+|\psi(x_0,y_0)-\psi(x_0,y_0)| \\
&= |D_1\psi(\theta_1,y)|\cdot|x-x_0|+|D_2\psi(x_0,\theta_2)| \\
&\quad \cdot|y-y_0|
\end{aligned}
$$

其中 $|D_1\psi(\theta_1,y)|\leqslant 1/2$，$|D_2\psi(x_0,\theta_2)|\leqslant 1/2$故

$$|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|\leqslant\frac{1}{2}|x-x_0|+\frac{1}{2}|y-y_0|$$

$$|T_x(y)-y_0|\leqslant|E|\cdot h+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k$$

选h如此之小，使$(2|E|+1)h\leqslant k$，于是有

$$|T_x(y)-y_0|\leqslant k$$

这个不等式表明，当$x\in\{x:|x-x_0|<h\}$时，T_x将$y\in J$映入J内，并对$x\in I$及y_1，$y_2\in I$，有

$$
\begin{aligned}
|T_x(y_1)-T_x(y_2)| &= |-\psi(x,y_1) \\
&\quad +\psi(x,y_2)|\leqslant\frac{1}{2}|y_1-y_2|
\end{aligned}
$$

所以对每一个$x\in I$，T_x都是J到自身内的压缩映射。故存在唯一的y使$T_x(y)=y$，令这个对应关系$x\longmapsto y$为f，即有$y=f(x)$，这样一来，序偶(x,y)便满足方程$F(x,y)=0$

ii）的证明

先证f在x_0连续。任给$\varepsilon>0$并设$\varepsilon<k$，令S_ε是以(x_0,y_0)为中心，2ε为边长的正方形。由i）的证明过程

可以看出，此时存在$h'(<h)$，把f限制在$\widetilde{I}=\{x: |x-x_0|<h'\}$上，则对每一个$x\in\widetilde{I}$，有$y=f(x)\in J_\varepsilon=\{y: |y-y_0|<\varepsilon\}$，即有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，所以$f$在$x_0$连续。当$x_1$是$I$内异于$x_0$的一点时，设$y_1=f(x_1)$，因而有$F(x_1, y_1)=0$及$D_2F(x_1, y_1)>0$（或$<0$），故$y=f(x)$在$x_1$的连续性可与$x_0$时一样讨论。

次证f'在I上存在且连续。设$x\in I$，选Δx使$(x+\Delta x)\in I$，于是

$F(x+\Delta x, f(x+\Delta x))=0$，$F(x, f(x))=0$令$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f$，由微分基本定理有

$$
\begin{aligned}
0&=F(x+\Delta x, f+\Delta f)-F(x, f)\\
&=[D_1F(x,f)+\varepsilon_1(\Delta x, \Delta f)]\Delta x+[D_2F(x,f)\\
&\quad+\varepsilon_2(\Delta x, \Delta f)]\Delta f
\end{aligned}
$$

其中$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta f)$与$\varepsilon_2(\Delta x, \Delta f)$当$\Delta x\longrightarrow 0$时都趋于零（当$\Delta x\to 0$时也有$\Delta f\longrightarrow 0$）。故

$$
\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{D_1F(x, f)+\varepsilon_1(\Delta x, \Delta f)}{D_2F(x, f)+\varepsilon_2(\Delta x, \Delta f)}
$$

从而

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)=-\frac{D_1F(x, f)}{D_2F(x, f)}
$$

由D_1F，D_2F之连续性知$f'(x)$也连续，

对于$m>1$的情况也有类似的定理，但我们叙而不证。

定理 8 设A是$R^m\times R^1$的开子集，$P_0=(X^0, y^0)=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, y^0)\in A$，$F$是$A$到$R^1$的一个映射，$F$以及$D_iF(X^0, y^0)$，$(1\leqslant i\leqslant m+1)$都在$A$内连续，并且

$$
F(X^0, y^0)=0,\quad D_{m+1}F(X^0, y^0)\neq 0
$$

则

i） 存在正数h和k，使对m维区间$I_m=\{X=(x_1,x_2,\cdots x_m):|x_i-x_i^0|<h,\ 1\leqslant i\leqslant m\}$内的每一个X，在一维区间$J=\{y:|y-y^0|<k\}$内有唯一的$y$与之对应使之满足方程$F(X,y)=0$，由此在$I_m$上定义了一个实函数$y=y(X)$使$F(X,y(X))\equiv 0$。

ii） 函数$y=y(X)$以及它的所有一级偏导数在I_m上连续，并且有$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{D_iF}{D_{m+1}F}=-\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial y}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$

例1 给出$R^1\times R^1$的一个关系

$F(x,y)=y^3+2x^2y-x^4+2x+4y=0$

证明这个关系在R^1上确定了一个隐函数。

证明 对一切x，y，有

$$D_2F=3y^2+2x^2+4>0$$

因而，对固定的x，函数$F(x,y)$是y的严格增加函数，并且当$y\to-\infty$时，$F(x,y)\to+\infty$；当$y\to+\infty$时，$F(x,y)\to+\infty$，而$F(x,y)$连续，故有而且仅有一个y值满足$F(x,y)=0$，由此可知，这个对应关系确定了R^1上的一个连续可微函数$y(x)$满足$F(x,y(x))\equiv 0$

例2 给出关系

$$F(x,y)=x^3+y^3-6xy=0$$

试问在满足$F(x,y)=0$的点中，哪些点的近傍关系$F(x,y)=0$确定一个隐函数$y=y(x)$或隐函数$x=x(y)$？

解 $x^3+y^3-6xy=0$的图形（见图36）代表平面上的一条曲线F，考察F上使

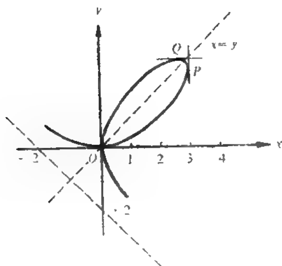

图 36

$$D_1F = 3x^2 - 6y = 0 \quad D_2F = 3y^2 - 6x = 0$$

的点

显然（0，0）上它们都等于零。此外还观察到，当 $x = \frac{1}{2}y^2$ 时，$D_2F = 0$，求出抛物线 $x = \frac{1}{2}y^2$ 与 Γ 的交点 P，得

$$P = (2\sqrt[3]{4},\ 2\sqrt[3]{2})$$

曲线 Γ 在这个点上有垂直的切线，因之除了原点和 P 之外，在其余点的邻域内，y 均可以表示为 x 的函数。

通过同样的计算知道，在满足 $F(x, y) = 0$ 的点中，只有点（0，0）与 $Q = (2\sqrt[3]{2},\ 2\sqrt[3]{4})$ 才使 $D_1F = 0$，所以在其它点的邻域内 x 均可以成 y 的函数。

4.2 由方程组确定的隐函数存在定理

现在我们要把一个方程所确定的隐函数存在定理推广到由多个方程所确定的隐函数存在定理。

设R^m中的向量为$X=(x_1, x_2, \cdots x_m)$，R^n中的向量为$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$R^{m+n}$的向量为$(X, Y)=(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，我们考察$R^{m+n}$到$R^n$内的映射$F(X, Y)$，并设它的分量是

$$F_1(X, Y),\ F_2(X, Y)\cdots,\ F_n(X, Y)$$

其中每一个F_i（$1\leqslant i\leqslant n$）都是R^{m+n}到R^1的实函数。

方程组的隐函数存在问题的提法如下：

设A是$R^m\times R^n$的一个开子集（$n>1$），$(X^0, Y^0)\in A$，F是A到R^n内的映射。如果$F(X^0, Y^0)=0$，那么在怎样的条件下，在(X^0, Y^0)的近傍$F(X^0, Y^0)=0$确定一个隐函数$Y=F(X)$，使满足

$$Y^0=F(X^0),\quad F(X, F(X))\equiv 0$$

也可以换成另一种说法：

给出A上的一个方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \end{cases}$$

已知A中点$(X^0, Y^0)=(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$满足上述每一个方程，在怎样的条件下，使在$(X^0, Y^0)$的近傍我们能从上述方程中把$y_1, y_2, \cdots, y_n$"解"出来并用$x_1, x_2, \cdots, x_m$表示：

$$y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

$$y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

为了研究方便，我们需要引入两个有用的矩阵$\nabla_x \mathbf{F}$与$\nabla_y \mathbf{F}$。

设A是$\mathbf{R}^{m+n}$的一个开子集，$\mathbf{F}: A \to \mathbf{R}^n$是属于$C^1(A)$类的一个函数（即它的各个一级偏导数均在$A$上连续）。定义$n\times m$的矩阵$\nabla_x \mathbf{F}$和$n\times n$的矩阵$\nabla_y \mathbf{F}$如下：

$$\nabla_x \mathbf{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}F_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}F_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}F_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}F_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_n & \frac{\partial}{\partial x_2}F_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m}F_n \end{pmatrix}$$

$$\nabla_y F \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}F_1 & \frac{\partial}{\partial y_2}F_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}F_1 \\ \frac{\partial}{\partial y_1}F_2 & \frac{\partial}{\partial y_2}F_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}F_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}F_n & \frac{\partial}{\partial y_2}F_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}F_n \end{pmatrix}$$

定理 9 设A是$\mathbf{R}^{m+n}$的开集，$(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0)\in A$，$\mathbf{F}: A\to \mathbf{R}^n$是$C^1(A)$类函数，它的分量为$F_1, F_2, \cdots, F_n$，并满足

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0)=0, \qquad \det \nabla_y \mathbf{F}|_{(x^0, y^0)}\neq 0$$

则存在正数h和k；使

i） $O_m(X^0; h)\times O_n(Y^0; k)\subset A$；

ii） 对每一个$X\in O_m(X^0; h)$，有唯一的$Y\in O(Y^0; k)$满足$F(X, Y)=0$，令f是由上述对应关系所确定的$O_m(X^0; h)$到$O_n(Y^0; k)$内的函数$Y\longmapsto X$，则$f\in C^1(O_m(X^0; h))$并且$f'(X)=-(\nabla_Y F)^{-1}\cdot\nabla_X F$

由于我们这里采用的证法比较初等，为了节省篇幅并使证明简明易懂，我们不准备对一般的隐函数存在定理进行论证，而是对具体的m，n，例如$m=3$，$n=2$进行证明，读者不难由此推广到一般的情形。

定理 若实值函数F，G满足：

i） $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)=0$，

$G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)=0$；

ii） 在含$P_0=(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$的某个邻域内，函数$F$，$G$分别具有连续的一级偏导数，并在$P_0$有

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\partial F/\partial u & \partial F/\partial v\\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v\end{vmatrix}\neq 0$$

则

1） 在P_0的某个邻域内，方程组

$$\begin{cases}F=0\\ G=0\end{cases}$$

确定了唯一的一组解

$$u=u(x, y, z),\quad v=v(x, y, z)$$

它们定义在(x_0, y_0, z_0)的某个邻域内，并且满足

$$u_0=u(x_0, y_0, z_0),\quad v_0=v(x_0, y_0, z_0)$$

以及

$$F(x,y,z,u(x,\ y,\ z),v(x,\ y,z))\equiv 0$$
$$G(x,y,z,u(x,\ y,\ z),v(x,\ y,z))\equiv 0$$

2） 在（x_0，y_0，z_0）的某个邻域内，$u(x,y,z)$与$v(x,y,z)$具有连续的一级偏导数，它们满足

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

证明 我们将逐次应用定理８。

一、因为在$P_0=(x_0,\ y_0,\ z_0,\ u_0,\ v_0)$处，$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\ v)}\neq 0$，故$\frac{\partial F}{\partial u}$，$\frac{\partial F}{\partial v}$中至少有一个不等于零。为确定计，假定$\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$，故由定理８，在$P_0$近傍能从方程$F(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0$中解出

$$u=\phi(x,\ y,\ z,\ v)$$

并且

$$u_0=\phi(x_0,y_0,z_0,v_0)，\ \phi_v=-\frac{F_v}{F_v}$$

由此可知，在P_0近傍，方程$F=0$与$u=\phi(x,y,z,v)$等价，故在P_0近傍方程组$F=0$，$G=0$与方程组

$$\begin{cases} G(x,\ y,\ z,\ \phi(x,\ y,\ z,v),\ v)=0 \\ u=\phi(x,\ y,\ z,\ v) \end{cases}$$

等价.

二、令 $\psi(x, y, z, v)$

$$=G(x, y, z, \varphi(x, y, z, v), v)$$

则有

$$\psi(x_0, y_0, z_0, v_0)=0$$

并且在 (x_0, y_0, z_0, v_0) 有

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=G_u\varphi_v+G_v=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u, v)}\Big/F_u\neq 0$$

对 $\psi(x, y, z, v)=0$ 可应用定理8，得出在 (x_0, y_0, z_0, v_0) 近旁存在隐函数 $v=g(x, y, z)$ 满足

$$v_0=g(x_0, y_0, z_0) \text{ 及 } \psi(x, y, z, g(x, y, z))\equiv 0$$

三、将 $v=g(x, y, z)$ 代入 $u=\varphi(x, y, z, v)$ 中，得

$$u=\varphi(x, y, z, g(x, y, z))=f(x, y, z)$$

且

$$u_0=f(x_0, y_0, z_0)$$

由此得

$$\begin{cases} u=f(x, y, z) \\ v=g(x, y, z) \end{cases} \qquad (※)$$

并且满足

$$u_0=f(x_0, y_0, z_0), \quad v_0=g(x_0, y_0, z_0)$$

此即为所求解。

在 $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ 近旁，（*）与方程组 $F=0$，$G=0$ 等价。通过直接验证，在 P_0 近傍有恒等式

$$F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))\equiv 0$$

$$G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))\equiv 0$$

成立。

由于由定理8所确定的隐函数是唯一的，连续函数之复合函数是连续的，所以本问题之解（＊）是唯一且连续的。

四、下以$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$为例，证明$u$，$v$的各个一级偏导数是连续的。

对变量x以改变量Δx，而令y，z固定，于是有

$$F(x+\Delta x,\ y,\ z,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v)=0$$
$$G(x+\Delta x,\ y,\ z,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v)=0$$

而

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,\ y,\ z,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v)\\&\quad-F(x,\ y,\ z,\ u,\ v)\\&=\overline{F}_x\cdot\Delta x+\overline{F}_u\Delta u+\overline{F}_v\cdot\Delta v\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}0&=G(x+\Delta x,\ y,\ z,\ u+\Delta u,\ v+\Delta v)\\&\quad-G(x,\ y,\ z,\ u,\ v)\\&=\overline{G}_x\cdot\Delta x+\overline{G}_u\cdot\Delta u+\overline{G}_v\cdot\Delta v\end{aligned}\tag{2}$$

其中出现的偏导数都表示取自某个中值。由于在$(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$处，

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

而$\frac{\partial F}{\partial u}$，$\frac{\partial F}{\partial v}$，$\frac{\partial G}{\partial u}$，$\frac{\partial G}{\partial v}$均在此点近旁连续，所以当$\Delta x$充分小时亦有

$$\begin{vmatrix}\overline{F}_u & \overline{F}_v\\ \overline{G}_u & \overline{G}_v\end{vmatrix}\neq 0$$

从而由Cramer法则，能从（1），（2）解出

$$\Delta u=-\Delta x\cdot\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\Delta v=-\Delta x\cdot\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

注：在已知u，v的偏导数为连续的条件下，这些偏导数可由链法则求得。事实上，本定理所确定的隐函数方程可由下述函数复合而成

$$(x,y,z)\overset{K}{\longmapsto}(x,y,z,u,v)\overset{H}{\longmapsto}(h_1,h_2)$$

其中

$$\mathrm{k}:\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=z\\ u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\end{cases}$$

$$\mathrm{H}:\begin{cases}h_1=F(x,y,z,u,v)\\ h_2=G(x,y,z,u,v)\end{cases}$$

于是有

$$F' \circ f = 0$$

用矩阵表示即为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \vdots & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \vdots & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

故得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

例 3　设 $\mathrm{F}(X, Y)$ 为 $R^2 \times R^2$ 到 R^2 内的映射，其中 $\mathrm{F} = (F_1, F_2)$：

$$F_1 = x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + y_2^2 + 4$$

$$F_2 = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2y_1^2 + 3y_2^4 + 8$$

设 $P_0 = (2, -1; 2, 1) = (X^0, Y^0)$，显然 $\mathrm{F} = (X^0, Y^0) = 0$ 经

计算，有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3y_1^2 & 2y_2 \\ -4y_1 & 12y_2^3 \end{vmatrix}_{(P_0)} = -128 \neq 0$$

故方程$F(X, Y)=0$在(X^0, Y^0)近傍确定了隐函数

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

并且有

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{(P_0)}}{-128} = \frac{13}{32}$$

同理有

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{5}{32}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{7}{16}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{16}$$

例 4 已知

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

试求$\frac{\partial r}{\partial x}$，$\frac{\partial r}{\partial y}$，$\frac{\partial \theta}{\partial x}$，$\frac{\partial \theta}{\partial y}$。

解 考察

$$F(x, y, r, \theta) = x - r\cos\theta = 0$$

$$G(x, y, r, \theta) = y - r\sin\theta = 0$$

由于

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} -\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

故当$r\neq 0$时，由隐函数存在定理可将r，θ解出用x,y表示。于是有

$$(x,y)\overset{H}{\longmapsto}(r,\theta)\overset{K}{\longmapsto}(x,y)$$

而使$K\circ H=id$，其中

$$H:\begin{cases}r=r(x,y)\\ \theta=\theta(x,y)\end{cases}$$

$$K:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

由链法则，得

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{bmatrix}$$

最后得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\theta\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{r}\cos\theta$$

4.3 反函数存在定理

我们在微积分教程中知道，若连续可微函数$y=f(x)$在x_0存在非零导数，则在x_0近傍$f(x)$是严格单调的，从而x与y的对应关系是双方一对一的，亦即在x_0近傍，$y=f(x)$存在反函数$f^{-1}(y)$，不仅如此，f^{-1}在$y_0=f(x_0)$也是可微的，并且有

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

现在我们利用隐函数存在定理，将此结果推广到向量值函数上去。

定理10（反函数定理） 设G是$\mathbf{R}^n$的开子集，$\mathbf{X}^0\in G$，$\mathbf{F}: G\to\mathbf{R}^n$是$C^1$类函数，并且

$$\mathbf{Y}^0=\mathbf{F}(\mathbf{X}^0),\quad \det\mathbf{F}'(\mathbf{X}^0)\neq 0$$

则存在以$\mathbf{X}^0$为中心的开球$O_n(\mathbf{X}^0;h)\subset G$和以$\mathbf{Y}^0$为中心的开球$O_n(\mathbf{Y}^0;k)$，使$\mathbf{F}$在$O_n(\mathbf{X}^0;h)$上的限制

$$\mathbf{F}: O_n(\mathbf{X}^0;h)\to O_n(\mathbf{Y}^0;k)$$

有一个C^1类的反函数$\mathbf{G}=\mathbf{F}^{-1}: O_n(\mathbf{Y}^0;k)\to O_n(\mathbf{X}^0;h)$，并满足

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}=id_Y\quad 或\quad \mathbf{G}\circ\mathbf{F}=id_X \tag{1}$$

并且有

$$\mathbf{F}'(\mathbf{X})\cdot\mathbf{G}'(\mathbf{Y})=\mathrm{I}\quad 或\quad \mathbf{G}'(\mathbf{Y})\cdot\mathbf{F}'(\mathbf{X})=\mathrm{I} \tag{2}$$

证明：考察

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y},\mathbf{X})=\mathbf{Y}-\mathbf{F}(\mathbf{X})$$

由于$\mathbf{F}(\mathbf{X}^0,\mathbf{Y}^0)=0$，$\det\nabla_X\mathbf{F}(\mathbf{Y}^0,\mathbf{X}^0)=-\det\mathbf{F}'(\mathbf{X})\neq 0$，故由定理9，存在$O_n(\mathbf{Y}^0;k)$到$O_n(\mathbf{X}^0;h)$内的$C^1$类函数$\mathbf{X}=\mathbf{G}(\mathbf{Y})$满足$\mathbf{F}(\mathbf{Y},\mathbf{G}(\mathbf{Y}))=0$，此即 (1)

由于$\mathbf{X}=\mathbf{G}(\mathbf{Y})=\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))$或$\mathbf{Y}=\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{Y}))$，所

以由链法则便得（2）。

如果F在整个G上恒有$\det F'(X)\neq 0$，并不能保证F在整个G上是双射，而只能保证局部的一一对应性。这一点从证明过程中是不难觉察的。下面的例子更能帮助我们对这一点的认识。

例5　考察函数$F: R^2\to R^2$，它的两个分量是

$$f_1 = x_1^2 - x_2^2, \qquad f_2 = 2x_1x_2$$

在圆环$G=\{(x_1, x_2): r_1<(x_1^2+x_2^2)^{1/2}<r_2\}$上，我们有

$$F'(X)=\begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

显然在G上，$\det F'(X) = 4(x_1^2+x_2^2)>0$，然而由F的定义可以看出，在$G$内有两个不同的X值对应同一个Y值。所以在整个$G$上函数不存在反函数。但如果把以上对应关系限制在$G$内的一个充分小的球上则是可逆的。

*4.4　条件极值

设D是R^m的一个开子集，$f: D\to R^1$为C^1类函数。

在很多应用中，要求计算函数f在某种约束下的局部最大值与局部最小值。这种约束往往用一个向量方程$\psi(X)=0$给出，其中ψ是D到R^k（$k<m$）内的C^1类向量值函数。如果ψ的分量为$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k$，那么向量值函数方程$\psi(X)=0$也可以代之以一组$m$元实值函数方程

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

方程组（1）称为约束条件，这里我们总假定$k<m$，因为如果（1）含有$k=m$个条件，那么适合（1）的点可能只有有限个；若$k>m$，那么可能会没有点同时适合（1）的各个方程。

条件极值的问题原则上都可以化成无条件极值问题来处理，事实上，假定$\psi_i: D\to R^1$（$1\leqslant i\leqslant k$）都是C^1类实函数，并且假定梯度向量$\nabla\psi_i$（$1\leqslant i\leqslant k$）线性无关，也就是说假定矩阵

$$\begin{pmatrix} D_1\psi_1 & D_2\psi_1 & \cdots & D_m\psi_1 \\ D_1\psi_2 & D_2\psi_2 & \cdots & D_m\psi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1\psi_k & D_2\psi_k & \cdots & D_m\psi_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

在D内有秩为k。不失一般性，我们总可以假定此矩阵的前k行、k列所构成的行列式在D内不等于零，因为我们总可以通过对变量及对方程重新编序而实现这一点。于是由隐函数存在定理，在每一个$X\in D$的近傍，可以用x_{k+1}，…，x_m来表示x_1，x_2，…，x_k，此即说，存在C^1类的函数g_1，g_2，…，g_k使方程组（1）等价于

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{k+1}, \cdots, x_m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k &= g_k(x_{k+1}, \cdots, x_m) \end{aligned} \tag{3}$$

因而寻求一个带有约束条件（1）（满足（2））的局部最大或最小值的问题便转化为寻求（$m-k$）元实值函数

$H(x_{k+1}, \cdots, x_m) = f\,[\,g_1(x_{k+1}, \cdots, x_m), \cdots,$

$g_k(x_{k+1},\cdots,x_n),x_{k+1},\cdots,x_m]$

的无条件极值问题，从而归结为寻求适合方程

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}=0\quad(j=k+1,\cdots,m)\tag{4}$$

的点的问题

如果$(x^0_{k+1},\cdots,x^0_m)$是(4)的一组解，将它代入(3)，又得$x_1^0,\cdots,x_k^0$，从而求得满足约束条件(1)的f的临界点是$(x_1^0,x_2^0,\cdots x_k^0,x^0_{k+1},\cdots,x^0_m)$。再利用二级导数定则，一般便可确定这些临界点是否是局部最大或最小值。

上述方法把条件极值问题化为无条件极值问题，获得了问题的解决办法，但这个方法有不可否认的缺点。首先是变量的对称性遭到破坏，其中一部分变量需保持为自变量而另一部分需作因变量对待，这就难免给人以一种缺少和谐性和不够优美之感；其次，这样做会出现复杂的计算，甚至使计算无法进行下去。Lagrange引入了一些新的变量，虽然同样把问题转化为无条件极值问题，但并没有破坏各个变量的平等地位，而且能使计算大为简化。

Lagrange参数法建立在这样的几何事实之上：若X_0是f在约束条件$\varphi(X)=0$下的极值点，那么f在X_0的梯度grad$f$必须是超曲面$\Phi_1=0,\Phi_2=0,\cdots,\Phi_k=0$在此点的各个法向量的线性组合。

为了说明这一点，我们先取$m=3$，$k=2$的特殊情况。设目标函数为$f(x,y,z)$，约束条件为

$$g(x,y,z)=0,\quad h(x,y,z)=0$$

若∇g，∇h线性无关，此时矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

的秩为2，假定$\frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} \neq 0$，则由隐函数存在定理可以从约束条件$g=0$，$h=0$中解出$y=\varphi(x)$，$z=\psi(x)$，并且

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)} \qquad \frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$$

代入目标函数，得

$$\Phi(x)=f(x, \varphi(x), \psi(x))$$

问题归结为求$\Phi(x)$的无条件极值，为此必须满足$\Phi'(x)=0$，即

$$D_1 f + D_2 f \cdot \frac{d\varphi}{dx} + D_3 f \frac{d\psi}{dx} = 0$$

化简得

$$D_1 f \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} + D_2 f \cdot \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)} + D_3 f \cdot \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} = 0$$

此即说，向量grad$f$ 与向量$\left(\frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}\right)$正交，而后者为曲线$\begin{cases} g=0 \\ h=0 \end{cases}$的切向量，所以grad$f$必定是曲面$g=0$与$h=0$的法向量的线性组合（grad$f$在曲线$\begin{cases} g=0 \\ h=0 \end{cases}$的法平面内，而$g=0$的法向量以及$h=0$的法向量都与曲线$\begin{cases} g=0 \\ h=0 \end{cases}$的法平面平行），所以存在实数$\lambda$与$\mu$，使

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

现在考察一般情况。

设f：$D(\subset R^m)\to R^1$是目标函数，约束条件为$G(X)=0$，其中G：$D\to R^k(k<m)$，并且$\mathrm{rank}\,G'(X)=k$，若$X_0\in D$ 适合$G(X_0)=0$且使f取相对极值，于是

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m=0 \qquad (A)$$

微分G的每一个分量$g_i(X)$，由一阶微分形式的不变性又有

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial x_m}dx_m=0 \qquad (B)$$
$$(i=1,2,\ldots,k)$$

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$为未定实数，用$\lambda_i$乘$(B)$中各式，然后再与$(A)$式相加，并项后得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_2}\right)dx_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_k}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_k}\right)dx_k+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}+\lambda_1\frac{\partial g_2}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_{k+1}}\right)dx_{k+1}+\cdots$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_m}+\cdots,\ \lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_m}\right)dx_m$$

$$=0 \qquad\qquad (C)$$

由于$X=(x_1, x_2, \cdots x_m)$要满足$G(X)=0$，故变量$x_1, x_2, \cdots x_m$之间不可能是独立的，所以不能立即从（C）得出每一个dx_i前的系数等于零的结论。但是由于

$$G'(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

的秩为$k(<m)$，所以不妨假定$\frac{\partial(g_1, g_2, \cdots, g_k)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_k)}\neq 0$，由隐函数存在定理，可从方程组

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_m)=0 \\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_k(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_m)=0 \end{cases}$$

中解出$x_1, x_2, \cdots, x_k$并用$x_{k+1}, \cdots, x_m$表示之。设

$$\begin{cases} x_1=\phi_1(x_{k+1}, \cdots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k=\phi_k(x_{k+1}, \cdots, x_m) \end{cases} \qquad (D)$$

（这里我们虽然也把x_1，…，x_k视为因变量，但这是形式上的，最终将不破坏自变量x_1，x_2，…，x_m之间的对称性。）

如果存在实数λ_1^0，…，λ_k^0能使

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1^0\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}+\lambda_1^0\frac{\partial g}{\partial x_k}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_k}=0 \end{cases} \quad (E)$$

那么由于x_{k+1}，…，x_m为独立变量，所以由

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}+\lambda_1^0\frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_{k-1}}\right)dx_{k+1}+\cdots$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1^0\frac{\partial g_1}{\partial x_m}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_m}\right)dx_m=0$$

可得各微分系数也等于零的结论。即有

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}+\lambda_1^0\frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_{k+1}}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1^0\frac{\partial g_1}{\partial x_m}+\cdots+\lambda_k^0\frac{\partial g_k}{\partial x_m}=0 \end{cases} \quad (F)$$

然而使（E）成立的λ_1^0，λ_2^0，…，λ_k^0是唯一存在的，因为（D）是变量λ_1，λ_2，…，λ_k的Cramer组，因此同时满足（D）与（E）的λ_1^0，λ_2^0，…，λ_k^0是唯一存在的。

为了求出约束条件下临界点的坐标x_1^0，x_2^0，…x_m^0以及k个乘数λ_1^0，λ_2^0，…λ_k^0，我们可以引入辅助函数。

$$L=L(x_1\cdots,x_m,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(X)$$

这时方程组（D）与（E）就可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0 & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)\end{cases}\qquad\text{(F)}$$

而满足（F）的（x_1，x_2，…，x_m，λ_1，λ_2，…，λ_k）即为函数L的无条件临界点。如果（x_1^0，x_2^0，…，x_m^0，λ_1^0，λ_2^0，…，λ_k^0）是L的无条件临界点，那么（x_1^0，x_2^0，…，x_m^0）便是f在约束条件下的临界点，而λ_1^0，λ_2^0，…，λ_k^0即为∇f关于∇g_1，∇g_2，…，∇g_k的线性组合系数。当然用Lagrange 方法亦只能得到极值的必要条件。

例 已知中心在原点的二次曲面的方程为

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$，求其各个半轴之长。

解 令$X=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，

$$g(X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_ix_j-1$$

问题即化为在约束条件$g(X)=0$下求函数

$$f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

下的极值。由Lagrange乘数法，引入乘数λ，并考察向量方程

$$\nabla f(X)-\lambda\nabla g(X)=0\qquad(1)$$

由于f和$g(X)+1$都是2次齐次函数，并且$\nabla(g(X)+1)=\nabla g(X)$，所以由Euler定理（见本章习题11），得

$$\nabla f(X)\cdot X-\nabla g(X)\cdot\lambda X=2f(X)+2\lambda(g(X)+1)=0$$

因为$g(X)=0$，得$\lambda=-f(X)$，令$t=1/f(X)$，(1)便成为

$$t\nabla f(X)+\nabla g(X)=0$$

由此得出x_1，x_2，x_3的三个方程

$$\begin{cases}(a_{11}+t)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}+t)x_2+a_{23}x_3=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}+t)x_3=0\end{cases}$$

因为$X=0$不是本问题之解，故方程组的行列式必须为零，即必须

$$\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}+t & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+t\end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

方程(2)称为上述二次式$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$的特征方程。设此方程有三个根$t_1$，$t_2$，$t_3$，则曲面半轴分别为$t_1^{-1/2}$，$t_2^{-1/2}$，$t_3^{-1/2}$。

习　题

1．若A、$B\in L(R^n, R^m)$，C为实数，证明

a）$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$

$\|CA\|=|C|\cdot\|A\|$

b）如果用$\|A-B\|$表示A与B的距离，则$L(R^n, R^m)$是一个度量空间。

2．设

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$$

证明对每一个$(x, y)\in R^2$，$D_1f(x, y)$和$D_2f(x, y)$存在，但f在$(0, 0)$不连续。

3．设f是定义在开集E（$\subset R^n$）内的实值函数，并假定D_1f，D_2f，…，D_nf在E内有界。证明f在E内连续。

4．计算下列定义在R^n上的实值函数之一切偏导数与方向导数$D_uf(X)$。

a）$f(X)=a\cdot X$，其中$a\in R^n$为固定向量；

b）$f(X)=\|X\|^4$；

c）$f(X)=L(X)\cdot X$，其中$L\in L(R^n, R^n)$；

d）$f(X)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，　　$a_{ij}=a_{ji}$。

5．设f和g是R^n到R^m内的两个向量值函数。假定f在C可微，并且$f(C)=0$；g在C连续。令$h(X)=g(X)\cdot f(X)$，证明h在C可微，并且有

$$[Dh(C)](u)=g(c)\cdot\{[Df(c)](u)\},(u\in R^n)$$

6．设映射$(x,y)\longmapsto(u,v,w)$由

$$u=x^2-2y$$
$$v=x^2-2xy$$
$$w=3x^2y-2y$$

所确定。求它在点（3，－2）的微分。

7．证明$D(f+g)=Df+Dg$在两个函数都可微的点上成立。

8．设D为R^n的开凸集，F为D到R^m内的映射。若每一个$X\in D$，有$F'(X)=0$，则F为常量。

9．设D为R^n的开集，F：$D\to R^m$在D内可微。设X,Y为D内两点，它们的连线段$L(X,Y)\subseteq D$，则对每一个$a\in R^m$，存在点$z\in L(X,Y)$使

$$a\cdot\{F(Y)-F(X)\}=a\cdot\{F'(z)(Y-X)\}$$

（提示：考察$F(t)=a\cdot F(X+tu)$）

10．计算$(x,y)\in R^2$处的梯度$\nabla f(x,y)$（假如存在的话）：

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

11．设D为R^n的一个开集，实值函数f定义在D上。谓f在D上是p次齐次的，如果$f(\lambda X)=\lambda^p f(X)$对每一个实数$\lambda$和$X$成立（$\lambda\cdot X\in D$）如果$f$是$p$次齐次的並且在$X$可微，证明

$$\nabla f(X)\cdot X=pf(X),\quad (\text{Euler})$$

12. 若f和g是两个定义在$\mathbf{R}^n$上的实值函数。证明

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$

13. 设f在$\mathbf{R}^1$内可导，g定义在$\mathbf{R}^3$上，其表达式为$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，记$h=f\circ g$。证明

$$\|\nabla h(x,y,z)\|^2=4g(x,y,z)\{f'[g(x,y,z)]\}^2$$

14. 设$w=f(x,u,v)$，$u=g(x,y)$，$v=h(y,z)$，

求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$，$\dfrac{\partial w}{\partial y}$，$\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

15. 设$z=yf(x^2-y^2)$，证明

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{y}$$

16. 设F是$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$内的可微函数，称$\det F'(X)$为F在X的Jacobian 行列式，并记

$$\det F'(X)=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

其中f_1，f_2，$\cdots f_n$为F的分量；x_1，x_2，$\cdots x_n$为X的坐标。计算下列函数的Jacobian行列式。

a）设$F=(f_1,f_2,f_3)$为$\mathbf{R}^3$内的一个向量值函数，其三个分量分别为

$$f_i(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_i}{1+x_1+x_2+x_3},$$

$$(i=1,2,3,\ \sum_{i=1}^{3}x_i\neq-1),$$

试求$\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$.

b） 若$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，

试求$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

c） 若$x=r\cos\theta\sin\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，

$z=r\cos\varphi$，

试求$\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$。

d） 若

$x_1=r\cos\phi_1$

$x_2=r\sin\phi_1\cos\phi_2$

$x_3=r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3$

…………

$x_{n-1}=r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1}$

$x_n=r\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-2}\sin\phi_{n-1}$

试求$\dfrac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \phi_1, \cdots \phi_{n-1})}$。

17. 给定$2n$个变量的n个方程

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \quad (1\leq i\leq n)$$

若$\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}\neq 0$，证明

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=(-1)^n\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\Bigg/\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$$

18. 下列各题之F与P＝（X，Y）均已给出.请验证隐函数存在定理对它们均成立。记隐函数为f，求f在X点的所有一级偏导数之值。

a） $F=(F_1, F_2)$；$P=(0, 0; 0, 0)$，其中

$F_1=2x_1-3x_2+y_1-y_2$

$F_2=x_1+2x_2+y_1+2y_2$

b） $F=(F_1, F_2)$；$P=(3, -1; 2, 1)$其中

$$F_1=x_1-2x_2+y_1+y_2-8,$$
$$F_2=x_1^2-2x_2^2-y_1^2+y_2^2-4$$

c） $F=(F_1, F_2)$；$P=(2, 1; -1, 2)$ 其中

$$F_1=x_1^2-x_2^2+y_1y_2-y_2^2+8,$$
$$F_2=x_1+x_2^2+y_1^2+y_1y_2-2$$

19. 设$F=(F_1, F_2)$是$R^3\times R^2$到R^2内的映射，其分量为

$$F_1(x_1,x_2,x_3; y_1,y_2)=2e^{x_1}+y_2x_1-4x_2+3$$
$$F_2(x_1,x_2,x_3; y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3$$

取$a=(3, 2, 7)$，$b=(0, 1)$，显然$F(a, b)=0$，证明a的近旁存在C^1类函数$Y=g(X)$满足$g(a)=b$及$F(X, g(X))=0$，并计算D_ig_j $(1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2)$。

20. 定义R^2到R^2内的映射$F=(F_1, F_2)$如下：

$$F_1=e^x\cos y, \quad F_2=e^x\sin y$$

a） F的值域为何？

b） 证明F的Jacobian 行列式在R^2的每一点都不为零，但F并不是R^2上的一个双射。

c） 置$a=\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$，$b=F(a)$。令$G$是$b$近旁满足$G(b)=a$的$F$的反函数。试用显式表示$G$并求出$F'(a)$与$G'(b)$，由此检验公式

$$F'(a)\cdot G'(b)=I$$

21. 证明方程组

$$\begin{cases} 3x+y-z+u^2=0 \\ x-y+2z+u=0 \\ 2x+2y-3z+2u=0 \end{cases}$$

能够解出x，y,u並用 z 表示之；能用 y表示x，y，u，也能用x表示y，z，u；但不能用u表示 x，y，z

22. 在R^3内定义$f(x, y_1, y_2)=x^2y_1+e^x+y_2$证明在$(1,-1)$的某个邻域内存在可微函数 g,满足 $g(1,-1)=0$及$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2)=0$，计算$D_1g(1, -1)$和$D_2g(1, -1)$

23. 验证下列给出的向量值函数 **F**都存在反函数，並求出它们的反函数**G**：

a) $F_1=x_1$，$F_2=x_1^2+x_2$；

b) $F_1=\dfrac{x_1}{1+x_1+x_2}$，

$F_2=\dfrac{x_2}{1+x_1+x_2}$ $(x_1+x_2>-1)$；

c) $F_1=x_1\cos\dfrac{\pi x_2}{2}$，

$F_2=x_1\sin\dfrac{\pi x_2}{2}$ $(x_1>0, |x_2|<1)$

24. 设$\mathbf{F}=(f_1, f_2, f_3)$的三个分量为

$f_1=e^{x_2}\cos x_1$，$f_2=e^{x_2}\sin x_1$，$f_3=2-\cos x_3$，

求点$P=(x_1, x_2, x_3)$使其近傍存在反函数。

25. 若$Y=F(X)$存在反函数，但$\det F'(a)=0$，证明F^{-1}在$F(a)$必不可微。

26. 用Lagrange 乘数法求下列条件极值：

a） 在约束条件 $2x_1+3x_2+4x_3-15=0$ 下求函数 $x_1^2+3x_2^2+2x_3^2$ 的最小值；

b） 在约束条件 $x_1-x_2+x_3+x_4-4=0$ 和 $x_1+x_2-x_3+x_4+6=0$ 下，求 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ 的最小值；

c） 在曲线 $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=25$ 上求出与原点最近的点；

d） 设 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 为正数。求在约束条件 $\sum_{i=1}^{k} x_i=1$ 下 $\sum_{i=1}^{k} b_i x_i$ 的最大值。

27. i） 在约束条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ 下求函数 $\prod_{i=1}^{n} x_i^2$ 的最大值；

ii） 若 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ 证明

$$(x_1^2x_2^2\cdots x_n^2)^{1/n}\leqslant 1/n$$

iii） 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数，证明

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

28. 求空间点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的距离。

第六章　R^n内的积分

§1　R^1内的Riemann积分

定积分是为了计算图形面积和解决其它物理问题而产生的。读者对此早已了解，并能较熟练地进行计算。这一节主要研究它的一些性质，弄清函数可积的条件。这一切都不难推广到重积分上去。为此我们先复习一下$[a, b]$上的定积分以及与之有关的概念。

1.1　$[a, b]$的分划

设$[a, b]$为R^1的一个有界闭区间。

定义1　具有性质

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

的有限点集$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$称为$[a, b]$的一个分划，而$x_0, x_1, \cdots, x_n$称为分划$P$的分点。令$\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$　$(1 \leqslant k \leqslant n)$，称$|P| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\triangle x_k\}$为分划$P$的模。分划$P$将$[a, b]$分割成$n$个彼此无公共内点的闭区间$I_1, I_2, \cdots, I_n$，有时也称集$\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$为$P$的一个分划。此时每一个$[a, b]$的闭子区间$I_i$叫做分划$P$的一个成员。

定义2　设$P_1 = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$与$P_2\{a$

$=y_0, y_1, \cdots, y_m=b\}$ 为〔a, b〕的两个分划。若 $P_1\subset P_2$，则称 P_2 是 P_1 的一个加密。

任给〔a, b〕的两个分划，显然 $P=P_1\cup P_2$ 也是〔a, b〕的一个分划，并且 P 既是 P_1 的加密又是 P_2 的加密，故称 P 是 P_1 与 P_2 的公共加密。

1.2 Riemann积分

假定 $f(x)$ 是定义在有界闭区间〔a, b〕上的一个已知函数。$P=\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 是〔a, b〕的一个分划。在 $I_i=[x_{i-1}, x_i]$ 内，任取一点 ξ_i（$1\leqslant i\leqslant n$），作和

$$S(f, p, \xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

这个和数通常称为Riemann和。它当然与分法及 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的选取有关。但如果下面的极限存在，

$$\lim_{|P|\to 0} S(f, P, \xi)=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i=I \quad (1)$$

并且这个极限与分划 P 及 ξ 的选取无关，则称 f 在〔a,b〕上Riemann可积，简称 R—可积。并记此极限值为 f 在〔a,b〕上的积分：

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

为了与后面即将引入的Darboux积分相区别，我们暂在这个积分号前标上一个（R），即记为

$$I=(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

这里我们要注意，极限（1）事实上与我们以前引入的数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 与函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的概念有

所不同。这里$S(f, P, \xi)$并不是$|P|$的函数。因为很显然，有相同模的分划是可以多种多样的。即使分划确定了，ξ的选取又何止千千万万！所以这里所考察的，实际上是一种广义的极限过程。但它并不妨碍我们把极限I看作是已知过程中由量$S(f, P, \xi)$所确定的。例如，以p为周长的矩形有千千万万，这些矩形的面积也不尽相同。它们虽然不是p的函数，但面积恒小于$p^2/4$，故当$p\to 0$时，也可以使这些以p为周长的矩形面积都趋于零。所以明确极限(1)的含义是非常必要的。它的含义是指：

对无论怎样小的正数ε，恒存在$\delta>0$，使得对$[a,b]$的任意一个分划P，只要$|P|<\delta$，不论$\xi_i\in I_i=[x_{i-1}, x_i]$如何选取，必有不等式

$$|S(f, P, \xi)-I|<\varepsilon$$

成立。

由Riemann可积的定义，立即可以推出，若f在$[a, b]$上可积，f在$[a, b]$上一定有界。事实上，对给定的$\varepsilon=1$，由于f在$[a, b]$上可积，所以存在着$\delta>0$，对任何一个模小于δ的分法$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，以及任意的$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<1$$

从而有

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1<1+|I|+\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (*)$$

暂时固定$\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$，而令$\xi_1$在$[a, x_1]$内变化，不等式(*)说明$f(x)$在$[a, x_1]$上有界。同理可证

$f(x)$在$I_2=[x_1, x_2]$，…，$I_n=[x_{n-1}, b]$上有界。从而$f(x)$在整个区间$[a, b]$上有界。

1.3 Darboux积分

为了更好地研究Riemann积分，我们用Darboux的方法，引进比黎曼和更简单的两个和数。

定义 3 设f是有界闭区间$[a, b]$上的有界实函数，P是$[a, b]$的一个分划。设

$$M_k=\sup\{f(x): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k\}$$
$$m_k=\inf\{f(x): x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k\}$$
$$(1\leqslant k\leqslant n)$$

置

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \quad 与 \quad L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

分别称$U(f, p)$与$L(f, P)$为f关于P的**达布上和**与**达布小和**。

达布上和与达布小和的几何意义是非常明显的。它们是以$[x_{i-1}, x_i]$为底，分别以M_i及m_i为高的那些矩形面积之和。

达布和有如下的主要性质：

性质 1° 设P是$[a, b]$的一个任意分划。有

$$L(f, P)\leqslant S(f, P, \xi)\leqslant U(f, P)$$

这由达布上和与达布下和以及黎曼和的定义立即可以推得。

性质 2° 设分划P_1是分划P的加密，则

$$U(f, P)\geqslant U(f, P_1)$$
$$L(f, P)\leqslant L(f, P_1)$$

这个性质表明，当分划加密时，相应的达布上和不会增加，而相应的达布下和不会减少。

证明 以上和为例。先设分划P_1只比分划P多一个分点。为确定起见，假设

$$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k\cdots, x_n\}$$

$$P_1=\{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, c, x_k, \cdots, x_n\}$$

设f在$[x_{k-1}, c]$与$[c, x_k]$的上确界分别为M_{k1}与M_{k2}，显然$M_{k1}\leqslant M_k$，$M_{k2}\leqslant M_k$，于是构成$U(f, P)$与$U(f, P_1)$的和式中，只有对应于$[x_{k-1}, x_k]$，$[x_{k-1}, c]$及$[c, x_k]$上的项不同，其余的项都是相同的。所以有

$$\begin{aligned} U(f, P)-U(f, P_1) &= M_k(x_k-x_{k-1})- \\ &\quad [M_{k1}(c-x_{k-1})+M_{k2}(x_k-c)] \\ &= (M_k-M_{k1})(c-x_{k-1})+(M_k- \\ &\quad M_{k2})(x_k-c)\geqslant 0 \end{aligned}$$

当分划P_1的分点比分划P的分点不止多一个时，我们可以逐次用加入一个分点将分划加密的办法，一步一步地证明之。

性质3° 设P_1，P_2是$[a, b]$的两个任意分划，则有

$$m(b-a)\leqslant L(f, P_1)\leqslant U(f, P_2) \leqslant M(b-a) \qquad (2)$$

其中

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x), \qquad m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

这个性质表明，任意一个分划的达布下和总不会超过另一个任意分划的达布上和；而上和与下和总是介于$m(b-a)$与$M(b-a)$之间。此即说，由所有达布下和或达布上和组成

的数集，是一个有界数集。

证明　因为$M_k\leqslant M$，$m_k\geqslant M$　（$1\leqslant k\leqslant n$），　故

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k\triangle x_k\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k=M(b-a)$$

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}m_k\triangle x_k\geqslant m\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k=m(b-a)$$

所以不等式（2）之最左与最右两式是成立的。

设P是分划P_1与P_2的公共加密。由性质1°及性质2°，有

$$m(b-a)\leqslant L(f,P_1)\leqslant L(f,P)\leqslant U(f,P)$$
$$\leqslant U(f,P_2)\leqslant M(b-a)$$

证毕。

现在我们来引入Darboux积分。从上面性质可以看出，达布上和有下界，并且随着分划的加密而减少；而达布下和有上界，并且随着分划的加密而增加。故对每一个有界函数f，

$$\inf_{P}\{U(f,P):P是[a,b]的分划\}$$

与

$$\sup_{P}\{L(f,P):P是[a,b]的分划\}$$

恒存在且有限。称

$$\overline{\int_a^b}fdx=\inf_{P}\{U(f,P):P是[a,b]的分划\}$$

为f在$[a,b]$上的**达布上积分**；称

$$\underline{\int_a^b}fdx=\sup_{P}\{L(f,P):P是[a,b]的分划\}$$

为f在$[a, b]$上的达布下积分。

由前讨论，显然有

$$m(b-a)\leqslant\underline{\int_a^b}f\leqslant\overline{\int_a^b}f\leqslant M(b-a)$$

定义 4 若

$$\overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f$$

则称f在$[a,b]$上为达布可积。它们的公共值称为f在$[a, b]$上的达布积分。并记为

$$(D)\int_a^b f dx$$

1.4 Darboux可积的充要条件

定理 1 设f在$[a, b]$上有界，则f在$[a, b]$上达布可积的充分而必要条件是，对任给的正数ε，存在$[a, b]$的一个分划P，使

$$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon \qquad (3)$$

成立。

证明 充分性。

若不等式（3）成立，则有

$$\overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f\leqslant U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$$

由ε的任意性，得$\overline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^b}f$，此即$f$为达布可积。

必要性。

若f为达布可积，则对任给的$\varepsilon>0$，存在分法P_1与P_2，使

$$U(f, P_1)<\int_a^b f+\varepsilon/2$$

$$L(f,\ P_2) > \underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2$$

设P为P_1与P_2的公共加密，从而有

$$-\varepsilon/2 + \underline{\int_a^b} f < L(f,\ P_2) \leqslant L(f,\ P) \leqslant U(f,P)$$

$$\leqslant U(f,\ P_1) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2$$

而 $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$，故得

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) < \varepsilon$$

定理证毕。

记$M_k - m_k = \omega_k$为f在$[x_{k-1},\ x_k]$上的振幅，则上述定理可以改述为：

定理1′ f在$[a,b]$上达布可积的充分而必要条件是对任给的$\varepsilon > 0$，存在$[a,\ b]$的一个分划P，使

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle x_k < \varepsilon$$

推论1 若f是$[a,b]$上的连续函数，则f在$[a,b]$上达布可积。

证明 因为f在$[a,\ b]$上一致连续，所以对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使对$[a,\ b]$内的任意两点x'与x''，只要$|x' - x''| < \delta$，便有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$$

故对每一个满足$|P| < \delta$的分划P，必有

$$U(f,\ P) - L(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

此即f在〔a, b〕上达布可积。

推论 2 若f是〔a, b〕上的单调函数，则f达布可积。

证明 不妨假定f是单调增加的。考察〔a, b〕上的一个任意分划$P=\{a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b\}$，使满足

$$|P|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

由于$M_k-m_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$，所以

$$U(f, P)-L(f, P)=\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}\triangle x_k$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(a)-f(a)]$$

$$=\varepsilon$$

换言之，f在〔a, b〕上达布可积。

引理 1 设$P^*=\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$是〔$a,b$〕的一个分划，则对$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对每一个模小于$\delta$的分法$P$，它的不完全包含在$P^*$的某个成员内的那些成员长度之和恒小于$\varepsilon$。

证明 所谓P的成员不完全包含在P^*的某个成员内，也就是这种成员含有P^*的分点。故这种成员之个数，不会超过$n-1$个。因此我们总可以取$\delta<\varepsilon/(n-1)$。这样，只要$|P|<\delta$，P的不完全包含在P^*的某个成员之内的那些成员长度之和必小于$\varepsilon/(n-1)\cdot(n-1)=\varepsilon$。

定理2 有界函数$f(x)$在$[a, b]$上Darboux可积，当且仅当

$$\forall \varepsilon(>0) \quad \exists \delta(>0) \quad \forall P(|P|<\delta) \Longrightarrow U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon。$$

（或$\lim\limits_{|P|\to 0}[U(f, P)-L(f, P)]=0$）。

证明 定理的充分性由定理1保证。下证定理的必要性。

设f在$[a, b]$上达布可积，并设$|f|\leqslant M$。由定理1，存在分划P^*，使

$$U(f, P^*)-L(f, P^*)<\varepsilon/2$$

视$\varepsilon/4M$为引理中的ε，而δ即为引理中对应于$\varepsilon/4M$的那个δ。

设P为任意一个模小于δ的分法$P=\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$。它的成员可以分成两类，第一类的成员完全含在$P^*$的某个成员内，第二类的成员则包含$p^*$的分点，而后者长度总和小于$\varepsilon/4M$。

设$\overline{P}$为P与P^*的公共加密。显然亦有

$$\sum_{(\overline{P})}\omega_i\Delta x_i=U(f, \overline{P})-L(f, \overline{P})<\varepsilon/2$$

考察

$$U(f, P)-L(f, P)=\sum_{(P)}\omega_i\Delta x_i=\Sigma_1+\Sigma_2$$

其中Σ_1表示与P的第一类成员有关的那些项，由于这些成员也是$\overline{P}$的成员，所以有

$$\Sigma_1\omega_i\Delta x_i<\sum_{(\overline{P})}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon/2$$

而Σ_2表示与P的第二类成员有关的那些项，所以有

$$\Sigma_2\omega_i\Delta x_i\leqslant 2M\Sigma_2\Delta x_i<2M\cdot\varepsilon/4M=\varepsilon/2$$

因此，当$|P|<\delta$时，恒有

$$\sum_{(p)} \omega_i \triangle x_i < \varepsilon \qquad \text{证毕}$$

推论 当f为Darboux可积时，则有

$$\lim_{|P|\to 0} U(f, P) = \lim_{|P|\to 0} L(f, P) = (D)\int_a^b f$$

证明 因为f Darboux可积，故有

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = (D)\int_a^b f$$

从而

$$\left(U(f, P) - \overline{\int_a^b} f\right) + \left(\underline{\int_a^b} f - L(f, P)\right)$$

$$= U(f, P) - L(f, P) \to 0$$

上式左端每一个括号内均为非负数，因此有

$$\lim_{|P|\to 0} U(f, P) = (D)\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} L(f, P)$$

1.5 Darboux可积与Riemann可积的关系

定理3 $f(x)$在$[a, b]$上(R)可积，当且仅当$f(x)$在$[a, b]$上(D)可积。

证明

必要性。若f在$[a, b]$上(R)可积。令$|f|\leqslant M$。于是对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要分法P的模小于δ，不论$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$（$1\leqslant i\leqslant n$）如何选取，恒有不等式

$$I - \varepsilon/4 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i < I + \varepsilon/4$$

成立。但我们总可以选取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，使

$$f(\xi_i) > M_i - \varepsilon/4(b-a)$$

从而有

$$U(f, P) = \sum M_i \Delta x_i < \sum f(\xi_i) \Delta x_i + \varepsilon/4(b-a) \cdot (b-a) < I + \varepsilon/2$$

同理可选$\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，使

$$f(\eta_i) < m_i + \varepsilon/4(b-a)$$

得

$$L(f, P) = \sum m_i \Delta x_i > \sum f(\eta_i) \Delta x_i - \varepsilon/4 > I - \varepsilon/2$$

所以有

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \qquad (|P| < \delta)$$

即f为(D)可积。

充分性．若f在$[a, b]$上Darboux可积，此时

$$\lim_{P \to 0} (U(f, P) - L(f, P)) = 0$$

由于对任意的分划P，恒有

$$L(f, P) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f, P)$$

所以有

$$L(f, P) \leqslant (D)\int_a^b f \leqslant U(f, P) \qquad (1)$$

另一方面，又有

$$L(f, P) \leqslant S(f, P, \xi) \leqslant U(f, P) \qquad (2)$$

故由(1)，(2)，得

$$\left|S(f,P,\xi) - (D)\int_a^b f\right| \leqslant U(f,P) - L(f,P) \to 0$$

即

$$(R)\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,\xi) = (D)\int_a^b f$$ 证毕。

根据这个定理，我们就用不着区分这是黎曼积分还是达布积分了，因为这两种积分的存在性是彼此等价的，并且两者具有同一的积分值。今后我们把它们统一成一个记号，即 $\int_a^b f(x)\,dx$ 或 $\int_a^b f$。

由本定理及定理 1′，可以得到Riemann可积分的充要条件如下：

定理 4 f在有界闭区间$[a, b]$上黎曼可积的充要条件是，对事先任意给定的正数ε，存在$[a, b]$的一个分划$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，使

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

其中ω_k是$f(x)$在$I_k=[x_{k-1}, x_k]$上的振幅。

推论 1 若$f\in C[a,b]$，则f在$[a,b]$上黎曼可积。

推论 2 若f在$[a,b]$上单调，则f在$[a,b]$上黎曼可积。

例 在$[0, 1]$上定义的Dirichlet函数为黎曼不可积。事实上，不论P是$[0, 1]$的怎样的一个分划，恒有

$$\sum_{(P)} \omega_i \Delta x_i = 1 \nrightarrow 0$$

1.6 积分的基本性质

下面出现的函数，都被约定为定义在$[a, b]$上的有界函数。

性质 1° 若$k\geqslant 0$为常数，则有

$$\overline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (1)$$

$$\underline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (2)$$

若$k \leqslant 0$为常数，则有

$$\overline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (3)$$

$$\underline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (4)$$

由此推出，若f可积，则对任意的常数k，有

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (5)$$

证明 我们只证（1），（3），（5）三式，其余两式，留给读者去证。

公式（1）的证明。设P是〔a，b〕的任意一个分划，于是

$$U(kf, P) = \sum_{i=1}^{n} kM_i \triangle x_i = k\sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i = k \cdot U(f, P)$$

两边取下确界，得

$$\overline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

公式（3）的证明。设$k = -s$，则$s \geqslant 0$

$$\sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} \{kf(x)\} = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} \{-sf(x)\}$$

$$= -\inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} \{sf(x)\} = -s\cdot\inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}$$

$$= k\cdot\inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} = km_i$$

故

$$U(kf,P)=\sum_{i=1}^{n}km_i\triangle x_i=kL(f,P)=-sL(f,P)$$

两边取下确界，得

$$\overline{\int_a^b}kf(x)dx=\inf_P\{-sL(f,P)\}$$

$$=-s\cdot\sup_P\{L(f,P)\}$$

$$=k\underline{\int_a^b}f(x)dx$$

公式（5）的证明。若f在〔a，b〕上可积，则

$$\overline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

故若$k\geqslant0$，则由（1）、（2）；若$k\leqslant0$，则由（3）、（4），均可推得（5）之成立。

性质 2° 有不等式

$$\overline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx\leqslant\overline{\int_a^b}f_1dx+\overline{\int_a^b}f_2dx \qquad (6)$$

$$\underline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx\geqslant\underline{\int_a^b}f_1dx+\underline{\int_a^b}f_2dx \qquad (7)$$

由此可知，如果f_1，f_2可积，则f_1+f_2可积，并且

$$\int_a^b(f_1+f_2)dx=\int_a^b f_1dx+\int_a^b f_2dx \qquad (8)$$

证明 由达布上积分与达布下积分定义，并考虑到不等式

$$\sup_x\{f_1(x)+f_2(x)\}\leqslant\sup_x\{f_1(x)\}$$

$$+\sup_x\{f_2(x)\},$$

$$\inf_x\{f_1(x)+f_2(x)\}\geqslant\inf_x\{f_1(x)\}$$

$$+\inf_x\{f_2(x)\},$$

即可证明（6）、（7）。

因此，如果f_1，f_2可积，则由（6），（7），有

$$\overline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx\leqslant\overline{\int_a^b}f_1(x)dx+\overline{\int_a^b}f_2(x)dx$$

$$=\underline{\int_a^b}f_1(x)dx+\underline{\int_a^b}f_2(x)dx$$

$$\leqslant\underline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx \qquad (*)$$

而与此相反的不等式总是成立的，所以有

$$\overline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx=\underline{\int_a^b}(f_1+f_2)dx$$

即f_1+f_2在［a，b］上可积，并且（*）中出现的不等号均应是等号，所以有等式（8）成立。

性质 3° 若在［a，b］上，$f_1\leqslant f_2$，则

$$\overline{\int_a^b}f_1dx\leqslant\overline{\int_a^b}f_2dx \qquad (9)$$

$$\underline{\int_a^b}f_1dx\leqslant\underline{\int_a^b}f_2dx \qquad (10)$$

特别，当f_1，f_2可积时，有

$$\int_a^b f_1dx\leqslant\int_a^b f_2dx \qquad (11)$$

这个性质是不证自明的。

性质 4° 若$a<c<b$，则

$$\overline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^c} f dx + \overline{\int_c^b} f dx \qquad (12)$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^c} f dx + \underline{\int_c^b} f dx \qquad (13)$$

因此，若f在〔a，b〕可积，则f在〔a，c〕与〔c，b〕也可积。反之亦然。并且有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (14)$$

证明 任给$\varepsilon>0$，则存在〔a，c〕的一个分划P_1，与〔c，b〕的一个分划P_2，使

$$U(f, P_1) \leqslant \overline{\int_a^c} f dx + \varepsilon/2,\quad U(f, P_2) \leqslant \overline{\int_c^b} f dx + \varepsilon/2$$

将P_1的分点与P_2的分点合并，便是〔a，b〕的一个分划P^*，并且

$$U(f, P^*) = U(f, P_1) + U(f, P_2)$$

$$\leqslant \overline{\int_a^c} f dx + \overline{\int_c^b} f dx + \varepsilon$$

从而有

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf_P U(f, P) \leqslant U(f, P^*)$$

$$\leqslant \overline{\int_a^c} f dx + \overline{\int_c^b} f dx + \varepsilon$$

由ε的任意性，得

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \quad (*)$$

另一方面，存在〔a，b〕的一个分划$P^{**}=\{x_0, x_1, \cdots,$

$x_k, \cdots, x_n\}$，使

$$U(f, P^{**}) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$

如果c是P^{**}的分点，设$c = x_{k-1}$，则$P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, c\}$与$P_2 = \{c, x_k, \cdots, x_n\}$便分别是〔$a$, c〕与〔c, b〕的分划；如果c不是P^{**}的分点，设$x_{k-1} < c < x_k$，将点c加到P^{**}的分点中去，仍得〔a,c〕的分划$P_1 = \{x_0, \cdots, x_{k-1}, c\}$，与〔$c$,$b$〕的分划$P_2 = \{c, x_k, \cdots, x_n\}$。故不论上述情况之哪一种，均有

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx \leqslant U(f, P_1) + U(f, P_2)$$

$$\leqslant U(f, P^{**}) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$

由ε任意性，又得

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx \leqslant \int_a^b f dx \qquad (**)$$

联立（$*$）与（$**$），得

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx$$

公式（13）也同样可证，于此不再赘述。下面证明定理的后半部分。

若f在〔a, b〕可积，则对于事先给定的$\varepsilon > 0$，存在着〔a, b〕的分划P，使

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

不失一般性，可以假定c是P的一个分点。令$P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, c, x_{k+1}, \cdots, x_n = b\}$，则$P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, c\}$与$P_2 = \{c, x_{k+1}, \cdots, x_n = b\}$便是

$[a, c]$与$[c, b]$的分划，于是有

$$[U(f,P_1)-L(f,P_1)]+[U(f,P_2)-L(f,P_2)]$$
$$=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

从而说明存在着$[a,c]$的一个分划P_1，使 $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon$；存在着$[c, b]$的一个分划$P_2$，使$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon$。由定理1，知$f$在$[a,c]$与$[c,b]$上可积。相反的情况，也是容易证明的。证明也留给读者去完成。

公式（14），可由（12）和（13）直接推得。

如果我们规定$\int_a^a f dx=0$与$\int_a^b f dx=-\int_b^a f dx$，那么定理中之$c$就不必受$a<c<b$的限制。只要出现在等式中的三个积分有两个存在，不论$c\leqslant a$，$a<c<b$或者$b\leqslant c$，公式(12)、(13)、(14)仍然是正确的。

性质 5° 若$[c, d]$是$[a, b]$的一个子区间，而f在$[a, b]$上可积，则f在$[c, d]$上也可积。

证明 若f在$[a, b]$上可积，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在着$[a, b]$的一个分划P，使

$$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$$

我们不妨假定c和d都是分划$P=\{x_0, \cdots, c=x_k, x_{k+1}, \cdots, x_l=d, x_{l+1}, \cdots, x_n\}$的分点，令$P_1=\{c, x_{k+1}, \cdots, x_{l-1}, d\}$是$[c, d]$的一个分划，则

$$U(f, P_1)-L(f, P_1)\leqslant U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$$

此即说，f在$[c, d]$上可积。

性质 6° 如果f在$[a, b]$上可积，则$|f|$在$[a, b]$上也可积，并且

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leqslant \int_a^b |f| dx \tag{15}$$

证明 设f在$[a, b]$上可积。换言之，任给$\varepsilon > 0$，存在$[a, b]$的分划$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

其中ω_i是f在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅，因为对于这区间上的任何两点x'与x''，恒有

$$\left| |f(x')| - |f(x'')| \right| \leqslant |f(x') - f(x'')|$$

故$|f(x)|$在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅ω_i^*不超过ω_i，因此对应于分划P，亦有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i < \varepsilon$$

根据定理4，$|f|$可积。

既然$|f|$可积，所以$-|f|$可积，并且

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

故由性质3°之（11），推得不等式（15）。

但由$|f|$可积，是推不出f可积的结论的。这方面的反例不难找到。

性质 7° 若f和g均为$[a, b]$上的可积函数，则它们的乘积$f \cdot g$在$[a, b]$上也可积。

证明 因为f、g可积，故它们在$[a, b]$上有界。设$|f(x)| \leqslant K$，$|g(x)| \leqslant L$，并且对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$[a,b]$的分划$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$，使

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(1)} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(2)} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K}$$

其中$\omega_i^{(1)}$与$\omega_i^{(2)}$分别表示$f(x)$与$g(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅。设$f\cdot g$在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅为Ω_i。由于对$[x_{i-1}, x_i]$上的任意两点x'与x''，有

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')$$
$$=[f(x'')-f(x')]g(x'')+$$
$$[g(x'')-g(x')]f(x')$$

故

$$\Omega_i\leqslant L\omega_i^{(1)}+K\omega_i^{(2)}$$

因而对分划P，有

$$\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\Delta x_i\leqslant L\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(1)}\Delta x_i$$
$$+K\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(2)}\Delta x_i<\varepsilon$$

由积分存在的充要条件，推知$f\cdot g$在$[a, b]$上可积。

§2 R^n内的容积

2.1 n维区间的容积

为了建立R^n内的Riemann积分理论，我们需要引入R^n内集合容积的概念。它们是面积（$n=2$），体积（$n=3$）等概念的推广。

我们首先对最简单的集——n维区间定义容积。n维闭区间的概念，已在第四章1.1中介绍过，它是R^n的一个子集$[a, b]=\{X: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$。其中$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$R^n$的点，$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是$R^n$的两个定点，并且对$1\leqslant i\leqslant n$，满足$a_i\leqslant b_i$，

我们还定义R^n内的开区间，以及半开、半闭区间如下：

$$(a, b) = \{X: a_i < x_i < b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$$

$$[a, b) = \{X: a_i \leqslant x_i < b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$$

$$(a, b] = \{X: a_i < x_i \leqslant b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$$

这三种集合，再加上先前的闭区间，统称为n维区间。n维区间I的容积都定义为

$$V(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{1}$$

于是，当$n=1$时，$V(I)$即为一维区间I的长度；当$n=2$时，$V(I)$即为平面矩形面积；当$n=3$时，$V(I)$即为空间长方体的体积。

因为R^1内的积分我们已于前节研究过，所以下面我们讲的R^n，一般都假定$n\geqslant 2$。

如果R^n内的点集S可以表为有限个无公共内点的n维区间I_i之并，即若

$$S = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$$

我们便定义S的容积为

$$V(S) = \sum_{i=1}^{k} V(I_i) \tag{2}$$

今后我们约定由有限个无公共内点的n维区间所成之并集，简单地说成是n-区间有限并集。

性质1° 若S是R^n的一个n-区间有限并集，则S的容积与组成S的这些区间的表示方法无关(图37)。

证明 设$S=\cup I=\cup J$，其中I是有限个彼此无公共内点的闭区间，J也是有限个彼此无公共内点的闭区间。利用

所有I与J的界面，将S分割为一系列彼此无公共内点的闭区间I'与一系列彼此无公共内点的闭区间J'。每个I'的成员与J'的每一个成员，或者无公共内点，或者内部完全重合，而所有I'的并集即为所有J'的并集。

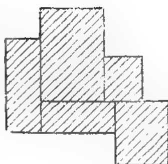

图 37

故有图(38)

$$\Sigma V(I') = \Sigma V(J')$$

另一方面，每个I_i又是有限个I'_i之并；每个J_i又是有限个J'_i之并。即

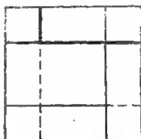

图 38

$$\Sigma V(I) = \Sigma V(I')$$

$$\Sigma V(J) = \Sigma V(J')$$

所以$\Sigma V(I) = \Sigma V(J)$

性质 2° 如果S与T都是n维区间的有限并集，且$T\subset S$，则

$$V(S\setminus T) = V(S) - V(T) \qquad (3)$$

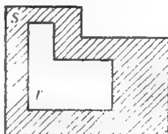

图 39

证明 因为$(S\setminus T)\cup T = S$，而$S\setminus T$与T均为无公共内点的n维区间之并集。故由定义，有

$V(S\setminus T) + V(T) = V(S)$，此即（3）图（39）。

性质 3° 设S、T都是n－区间的有限并集，则有

$$V(S\cup T) + V(S\cap T) = V(S) + V(T) \qquad (4)$$

证明 因为

$$S\cup T = [S\setminus(S\cap T)]\cup[T\setminus(S\cap T)]\cup[S\cap T]$$

而$S\setminus(S\cap T)$，$T\setminus(S\cap T)$和$(S\cap T)$仍是n－区间的有限并集，它们彼此无公共内点，所以按定义，有

$$V(S\cup T)=V[S\setminus(S\cap T)]+V[T\setminus(S\cap T)]+V(S\cap T)$$
$$=V(S)-V(S\cap T)+V(T)-V(S\cap T)+V(S\cap T)$$
$$=V(S)+V(T)-V(S\cap T)$$

移项后，即为（4）（图40）。

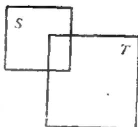

图 40

2.2 有界点集的容积

定义在$[a, b]$上的有界函数$f(x)\geqslant 0$的黎曼积分$\int_a^b f(x)dx$，表示了以$[a, b]$为底、以曲线$y=f(x)$为顶的曲边梯形的面积。这个面积可以用包围此曲边梯形的、彼此无公共内点的有限个矩形（二维区间）的面积之和以及包含在其内部的、彼此无公共内点的有限个矩形的面积之和来逼近。第一种面积和的下确界与第二种面积和的上确界即为达布上积分与达布下积分。故当$f(x)$在$[a, b]$上黎曼可积时，这些矩形面积之和的上确界与下确界便相等。此时即谓以f为顶的曲边梯形有面积(图41)。

我们将按照这样的想法，来建立R^n内有界点集S的容积的概念。

我们任意选取两个n－区间之有限并集I与J，使

$$I\supseteq S\ ,$$
$$J\subseteq S\ ,$$

并分别定义

$$V^+(S)=\inf_{I>S}V(I)$$

与

$$V^-(S)=\sup_{J<S}V(J)$$

为S的外容积与内容积，显然$V^-(S)\leqslant V^+(S)$。

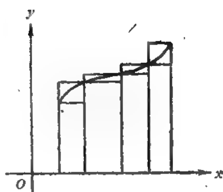

图 41

当$V^+(S)=V^-(S)$时，便称S是有容积的（n维）。否则称为是没有容积的。

如果S有容积，我们就定义S的内、外容积之公共值为S的容积，并记为$V(S)$，此时

$$V(S)=V^+(S)=V^-(S) \qquad (5)$$

R^n内的一个有界点集S，可以没有容积，但它的外容积与内容积总是存在的。

例1　设S为〔0，1〕内一切真分数所成之集。此集无容积。因为

$$V^+(S)=1,\qquad V^-(S)=0$$

我们约定，空集$\varnothing$是有容积的，其容积为零。

关于容积有如下明显的性质：

性质1°　n－区间或n－区间的有限并集都是有容积的，而且按（1）、（2）所定义的容积与按（5）所定义的容积是一致的。

性质2°　若$S\subseteq T$，则$V^-(S)\leqslant V^-(T)$，$V^+(S)\leqslant V^+(T)$。

这是因为，若I是含在S内的n－区间的有限并集，它必也含在T内；若J是包含T的n－区间的有限并集，它必也包

含S。故由内、外容积的定义，立即可推出结论之真。

性质 3° 由有限个点组成的集，以及R^n内完全落在一个坐标平面$x_k=c$上的有界点集，其n维容积恒为零。

这是因为对于上述两种集合，我们总可以用容积为任意小的n－区间有限并集把它们包起来(图42)。

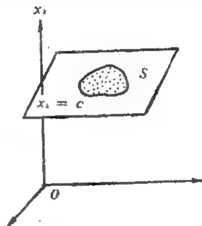

图 42

定理 5 设M、N为有界集，则有

$$V^+(M\cup N)+V^+(M\cap N)\leqslant V^+(M)+V^+(N) \quad (6)$$

$$V^-(M\cup N)+V^-(M\cap N)\geqslant V^-(M)+V^-(N) \quad (6)$$

因而，当M、N有容积时，$M\cup N$与$M\cap N$亦有容积，并且有

$$V(M\cup N)+V(M\cap N)=V(M)+V(N) \quad (7)$$

特别，当$M\cap N=\varnothing$时，则有

$$V(M\cup N)=V(M)+V(N) \quad (8)$$

证明 设ε为任意的正数。由外容积的定义，存在n－区间之有限并集I与J，使$M\subseteq I$，$N\subseteq J$，而有

$$V(I)<V^+(M)+\varepsilon/2;\quad V(J)<V^+(N)+\varepsilon/2$$

由2.1之性质3°，成立

$$V(I\cup J)+V(I\cap J)=V(I)+V(J)<V^+(M)+V^+(N)+\varepsilon$$

另一方面，$I\cup J$与$I\cap J$仍为n－区间有限并集，并且显然有

$$I\cup J\supseteq M\cup N,\qquad I\cap J\supseteq M\cap N$$

故按外容积的定义，有

$$V^+(M\cup N)+V^+(M\cap N)<V^+(M)+V^+(N)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性，便得（6）的第一式。（6）的第二式同理可证。

当 M、N 有容积时，按定义 $V^+(M)=V^-(M)$，$V^+(N)=V^-(N)$。所以由（6），得

$$V^+(M\cup N)+V^-(M\cap N)\leqslant V^-(M\cup N)+V^-(M\cap N)$$

又由 $V^+(M\cup N)\geqslant V^-(M\cup N)$ 以及 $V^+(M\cap N)\geqslant V^-(M\cap N)$，推出

$$V^+(M\cup N)=V^-(M\cup N)$$

$$V^+(M\cap N)=V^-(M\cap N)$$

此即说，$M\cup N$ 与 $M\cap N$ 有容积，从而有（7）与（8）。

定理6 设 M 是有界集，并且 $N\subseteq M$，则有

$$V^-(M)-V^+(N)\leqslant V^-(M\backslash N)$$

$$\leqslant V^+(M\backslash N)\leqslant V^+(M)-V^-(N) \qquad (9)$$

因之，若 M、N 有容积，则 $M\backslash N$ 也有容积，并且

$$V(M\backslash N)=V(M)-V(N) \qquad (10)$$

证明 任给 $\varepsilon>0$，存在 n-区间之有限并集 I 与 J，使 $J\subseteq N\subseteq M\subseteq I$，并且满足

$$V(I)<V^+(M)+\varepsilon/2,\quad V^-(N)<V(J)+\varepsilon/2$$

而 $M\backslash N\subseteq I\backslash J$，由性质2°及2.1之性质2°，有

$$V^+(M\backslash N)\leqslant V(I\backslash J)=V(I)-V(J)$$

$$<V^+(M)-V^-(N)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可得（9）之右半部分。同理可证（9）的左边部分。

定理7 设 K 为 n 维区域 G 的边界，则 G 有容积的充分而必要条件是 K 的 n 维容积为零。

证明 必要性。

设G有容积，故对任给的$\varepsilon>0$，存在n-区间之有限并集I与J，使$I\subseteq G\subseteq J$，且$V(J\setminus I)<\varepsilon$，显然$K\subset J\setminus I$，故$V^+(K)<\varepsilon$，由$\varepsilon$的任意性，乃得$V^+(K)=0$。从而$V(K)=0$。

充分性。

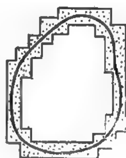

图 43

若$V(K)=0$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在n-区间之有限并集S，使$K\subset S$，且$V(S)<\varepsilon$，于是$T_1=G\setminus S$是含在G内的n-区间之有限并集，$T_2=G\cup S=S\cup(G\setminus S)=S\cup T_1$是包含$G$的$n$-区间之有限并集，而

$$V(T_2)-V(T_1)=V(S)<\varepsilon$$

故由ε的任意性，知G有容积(图43)。

§3 $\mathbf{R}^n$ 内的积分

这一节讲述$\mathbf{R}^n$($n\geqslant 2$)内某个有容积区域上的积分(或称重积分)，它是一元函数积分的推广，并且很多结果都是平行的。但高维的情况毕竟比一维的情况复杂，所以有时在叙述上或证明方法上都将作适当的改变。

3.1 分划

设F是$\mathbf{R}^n$内的一个有容积区域。我们用有限多张连续而容积为零的超曲面将F分割成有限个子区域F_1，F_2，…，F_m，使$F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_i$，并且约定每两个子区域的公共边界(如

果非空的话）要全部属于一个子区域（允许同时属于两个区域，但必须全部地属于）。按定理7，这些子区域都是有容积的。此时，称$P=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$为$F$的一个分划。$F_i(1\leqslant i\leqslant m)$是$P$的成员。显然这些成员之间彼此无公共内点，并且$V(F)=\sum_{i=1}^{m}V(F_i)$。

定义1 若P、P_1是F的两个分划，如果P_1的每一个成员完全包含在P的某个成员内，便称分划P_1是分划P的加密。

定义2 设$P_1=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$与$P_2=\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$是$F$的两个分划，如果第三个分划$P^*$的成员是由一切形如$F_i\cap G_{j(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)}$的成员组成，则称分划$P^*$是分划$P_1$与$P_2$的公共加密。

定义3 设$P=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$是$F$的一个分划，记$D(F_i)=\sup\{d(x, y): x\in F_i, y\in F_i\}$为$F_i$的直径，其中$d$是$R^n$的距离，则称

$$|P|=\max\{D(F_1), D(F_2), \cdots, D(F_m)\}$$

为分划P的模。

3.2 R^n内的Riemann积分

设F是R^n内的一个有容积区域，f是F到R^1内的函数。谓f在F上是黎曼可积的，当且仅当，存在实数L，对不论怎样的$\varepsilon>0$，恒存在正数δ，使对一切满足$|P|<\delta$的分划P，以及F_i内任意一点$x^i{}_{(1\leqslant i\leqslant m)}$，有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{m}f(x^i)V(F_i)-L\right|<\varepsilon$$

成立。

数L称为f在F上的Riemann积分值。记为

$$L=\int_F f dV \quad 或 \quad L=\int_F f \tag{1}$$

为了强调积分是在$\mathbb{R}^n$内施行的，有时往往把dV写成dV_n。与$\mathbb{R}^1$的情况一样，在没有弄清$\mathbb{R}^n$内的Riemann积分与Darboux积分关系之前，我们暂在黎曼积分号前标上(R)这一记号，以示区别。

有时也把（1）写成如下形式

$$L=\underbrace{\int\cdots\int}_{F} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

例如，当$n=2$时，写成$\iint\limits_F f(x, y)\,dxdy$，并相应地称之为$F$上的二重积分；当$n=3$时，写成$\iiint\limits_F f(x, y, z)\,dxdydz$，并相应地称之为$F$上的三重积分，等等。

与$\mathbb{R}^1$的情况一样，我们有

定理 8 设F是$\mathbb{R}^n$内的一个有容积区域，$f: F\to\mathbb{R}^1$为黎曼可积，则f在F上有界。

证明 设$(R)\int_F f dV=L$，故存在$\delta>0$，使对任何一个模小于δ的分划$P=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$，以及任意选取的$x^i\in F_{i\,(1\leqslant i\leqslant m)}$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(x^i)V(F_i)-L\right|<1$$

由于每个F_i都是区域，故$V(F_i)>0$，于是有

$$|f(x^i)|\,V(F_i)\leqslant 1+|L|+$$

$$\sum_{i=2}^{m}|f(x^i)|V(F_i) \qquad (*)$$

固定x^2，x^3，…，x^m，而令x^1在F_1内任意变动，不等式（*）意味着f在F_1上有界。同理可证f在F_2，F_3，…F_m上有界。从而在F上有界。

3.3 $\mathbb{R}^n$内的Darboux积分

设F是$\mathbb{R}^n$内的一个有容积区域，$P=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$是$F$的一个分划，$f$：$F\to\mathbb{R}^1$是$F$上的一个有界函数。对$1\leqslant i\leqslant m$，置

$$M_i=\sup_{x\in F_i}f(x), \qquad m_i=\inf_{x\in F_i}f(x)$$

并分别定义

$$U(f, P)=\sum_{i=1}^{m}M_iV(F_i)$$

$$L(f, P)=\sum_{i=1}^{m}m_iV(F_i)$$

为f在F上的关于分划P的达布上和与达布下和。

达布和的几何意义也是非常明显的。达布上和便是以M_i为高，F_i为底的那种超柱体体积之和；达布下和是以m_i为高、F_i为底的那种超柱体体积之和。达布和具有如下简单的性质：

性质1° 设P是F的任意一个分划，则有

$$L(f, P)\leqslant U(f, P)$$

性质2° 若分划P_1是分划P的一个加密，则有

$$U(f, P)\geqslant U(f, P_1)$$

$$L(f, P)\leqslant L(f, P_1)$$

证明 设$P_1=\{F'_1, F_2', \cdots, F_m'\}$是$P=\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$的加密。为简单计，不妨假设$F_1$是$P_1$的某些成员$F_1', F_2', \cdots, F_k'$之并。并令

$$M_1=\sup_{x\in F_1}\{f(x)\},\quad M_i'=\sup_{x\in F_i'}\{f(x)\}$$

$$(1\leqslant i\leqslant k)$$

显然，对$i=1, 2, \cdots, k$，均有$M_i'\leqslant M_1$，并且

$$\sum_{i=1}^{k}V(F_i')=V(F_1)$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{k}M_i'V(F_i)\leqslant M_1V(F_1) \qquad (*)$$

对$F_2, F_3, \cdots, F_n$也有类似于$(*)$的不等式。把这些不等式和起来，便有

$$U(f, P_1)\leqslant U(f, P)$$

同理可证

$$L(f, P_1)\geqslant L(f, P)$$

性质3° 设P_1，P_2是F的两个分划，则有

$$mV(F)\leqslant L(f, P_1)\leqslant U(f, P_2)\leqslant MV(F)$$

其中$M=\sup\limits_{x\in F}\{f(x)\}$，$m=\inf\limits_{x\in F}\{f(x)\}$。

证明 令P是P_1与P_2的公共加密，由性质1°与2°，有

$$\begin{aligned}mV(F)&=L(m, P_1)\leqslant L(f, P_1)\leqslant L(f, P)\\&\leqslant U(f, P)\leqslant U(f, P_2)\leqslant U(M, P_2)\\&=MV(F)\end{aligned}$$

定义4 设F是R^n内的一个有容积区域，而$f: F\to R^1$是F上的有界函数。记

$$\overline{\int_F} fdV = \inf_P \{U(f, P): P\text{是}F\text{的分划}\};$$

$$\underline{\int_F} fdV = \sup_P \{L(f, P): P\text{是}F\text{的分划}\}。$$

并分别称它们为函数f在F上的达布上积分与达布下积分。当

$$\overline{\int_F} fdV = \underline{\int_F} fdV$$

成立时，则谓f在F上达布可积，并把上述上、下积分的公共值定义为f的达布积分值，并记为

$$\int_F fdV \qquad \text{或} \qquad (D)\int_F fdV$$

3.4 Darboux可积的充要条件

设F为$\mathbf{R}^n$内的一个有容积区域。

定理9 f在F上达布可积，当且仅当对每一个$\varepsilon>0$，存在F的一个分划P，使

$$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$$

或与之等价的是使

$$\sum_{i=1}^{m}\omega(F_i)V(F_i)<\varepsilon$$

其中$\omega(F_i)$是f在F_i上的振幅。

推论 若f在F上一致连续，则f在F上达布可积。

定理及其推论的证明与$n=1$时没有什么两样，于此从略。

3.5 D－可积与R－可积的关系

引理3 设F是$\mathbf{R}^n$内有容积的区域，$P^*=\{F_1, F_2, \cdots,$

F_m } 是F的一个分划。则对任意的 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta>0$，使对F的任何一个模小于 δ 的分划P_1 其不完全含在 P^*的某个成员内部（即与 F_i 的边界有公共点）的那些成员的容积之和恒小于ε。

证明 令 F_i^0为F_i 的内点的全体。对每个F_i，都存在着 n-维区间的有限并集 G_i，使它的闭包也完全含在 F_i^0内，并且满足

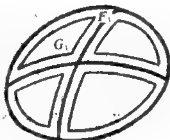

图 44

$$V(F_i\setminus\overline{G}_i)<\varepsilon/m$$

对每个i（$1\leqslant i\leqslant m$），因为$\overline{G}_i$是闭域，而且完全含在F_i内，故由Borel有限覆盖定理，存在正数 δ_i，使每一个以$\overline{G}_i$的点为中心，δ_i为半径的球$O(G_i; \delta_i)$仍包含在F_i^0内。令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$，则 δ 即为引理所求正数。

事实上，设 P_1 是满足$|P_1|<\delta$的F的另一个分划，则它的与F_i的边界有公共点的那些成员，必完全包含在$\cup(F_i\setminus\overline{G}_i)$内，而后者的容积不超过$m\cdot\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon$。

引理 4 设F是$\mathbf{R}^n$ 的一个有容积区域，$f: F\to\mathbf{R}^1$ 为有界。则对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对每一个模小于 δ 的分划P，有

$$U(f, P)<\int_F fdV+\varepsilon, \quad L(f, P)>\int_F fdV-\varepsilon \tag{2}$$

证明 我们只证明（2）的第一个不等式。

设$|f|\leqslant M$，对任给的$\varepsilon>0$，按达布上积分的定义，存在分划$P_0=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$，使

$$U(f, P_0)<\overline{\int}_F fdV+\varepsilon/2$$

视$\varepsilon/4M$为引理3中的ε，δ为对应于$\varepsilon/4M$的那个正数。设P为F的一个模小于δ的任意分划。P的成员可以分成两类：一类是由完全含在P_0的某个成员内的那些成员构成，并记为$J_1, \cdots, J_n$；另一类是其余的成员，它们的容积之和小于$\varepsilon/4M$。记后一类的成员为$K_1, K_2, \cdots, K_q$。

令P^*为P与P_0的公共加密。则$J_1, \cdots, J_n$也是P^*的成员。而P^*的其它成员则由形如$K_i\cap F_j\left(\begin{matrix}1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant m\end{matrix}\right)$的区域构成，且

$$\sum_{i=1}^{q} V(K_i)\leqslant\varepsilon/4M$$

记

$$M_i=\sup_{x\in J_i} f(x),\quad M_i'=\sup_{x\in K_i} f(x),\quad M_{ij}=\sup_{x\in K_i\cap F_j} f(x)$$

于是

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i V(J_i)+\sum_{i=1}^{q} M_i' V(K_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} M_i V(J_i)+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} M_i' V(K_i\cap F_j)$$

$$U(f,P^*)=\sum_{i=1}^{n} M_i V(J_i)+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} V(K_i\cap F_j)$$
$$\leqslant U(f, P_0)$$

两式相减，得

$$U(f,P)-U(f,P^*)=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(M_i'-M_{ij})$$

$$\cdot V(K_i\cap F_j)\leqslant 2M\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}V(K_i\cap F_j)$$

$$\leqslant 2M\sum_{i=1}^{q}V(K_i)<2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon/2$$

所以，

$$U(f,P)\leqslant U(f,P^*)+\varepsilon/2\leqslant U(f,P_0)+\varepsilon/2$$

$$<\overline{\int_F}fdV+\varepsilon$$

推论 若f在F上达布可积，则对任给的正数ε，存在$\delta>0$，对F的一切模小于δ的分划P，恒有

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

定理10 设F是R^n内的一个有容积区域，f是定义在F上的有界函数。f在F上黎曼可积，当且仅当f在F上达布可积。并且两者的积分值相同，即有

$$(R)\int_F fdV=(D)\int_F fdV$$

证明 必要性。

若f为黎曼可积，并记$A=(R)\int_F fdV$，于是对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当分划$P=\{F_1,F_2,\cdots,F_m\}$的模小于δ时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{m}f(x^i)V(F_i)-A\right|<\varepsilon/4$$

其中的x^i可以在F_i中任意选取。另一方面，

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{m}M_iV(F_i)<\sum_{i=1}^{m}\left[f(x^i)+\frac{\varepsilon}{4V(F)}\right]$$

$$\cdot V(F_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x^i) V(F_i) + \varepsilon/4$$

$$< A + \varepsilon/2 \qquad (*)$$

这里出现的$x^i \in F_i$满足$f(x^i) > M_i - \varepsilon/4V(F)$。同理，有

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{m} m_i V(F_i) > \sum_{i=1}^{m} \left[f(x^i) - \frac{\varepsilon}{4V(F)} \right] \cdot V(F_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x^i) V(F_i) - \varepsilon/4 > A - \varepsilon/2 \qquad (**)$$

其中$x^i \in F_i$且满足$f(x^i) < m_i + \frac{\varepsilon}{4V(F)}$。联立$(*)$与$(**)$，得

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

从而f为达布可积。并且由$(*)$与$(**)$，有

$$(D)\int_F f dV \leqslant A, \qquad (D)\int_F f dV \geqslant A$$

故有

$$(D)\int_F f dV = A = (R)\int_F f dV$$

充分性。

若f为达布可积。令$B = (D)\int_F f dV$，于是由引理4之推论，对任意给出的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，对一切模小于δ的F的分划$P = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$，有

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/2$$

我们还可以要求δ取得更小，使

$$U(f, P) < B + \varepsilon \quad 且 \quad L(f, P) > B - \varepsilon$$

因为对任何$x^i \in F_i$，总成立不等式

$$L(f, P) < \sum_{i=1}^{m} f(x^i) V(F_i) < U(f, P)$$

从而有

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(x^i) V(F_i) - B \right| < \varepsilon$$

即$\lim\limits_{|p| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{m} f(x^i) V(F_i) = B$。所以$f$在$F$上为黎曼可积。

与R^1的情况一样，R^n内的黎曼积分，也有1.6中所叙述的七条基本性质，我们不一一列举了。

§4 重积分的计算

4.1 化积分为累次积分

我们早已知道，把重积分化为累次积分是计算重积分的一个重要方法。这里我们研究重积分可以表为累次积分的条件。

定理11 设F是R^m内的一个有容积区域，G是R^n内的另一个有容积区域，则$B = F \times G$是R^{m+n}内的有容积区域，并且有

$$V_{m+n}(B) = V_m(F) \cdot V_n(G) \tag{1}$$

证明 当F、G分别是R^m与R^n的区间时，$B = F \times G$便是R^{m+n}内的区间。反之亦然。此时由区间容积之定义，可知公式（1）是正确的。公式（1）显然可以推广到F、G

都是区间的有限并集的情况。从而有$\overline{V}_{m+n}(B)=\overline{V}_m(F)\cdot\overline{V}_n(G)$及$V^+_{m+n}(B)=V^+_m(F)\cdot V^+_n(G)$。所以$B$有容积，且$V_{m+n}(B)=V_m(F)\cdot V_n(G)$。

定理12 设F是R^m内的有容积区域，G是R^n内的有容积区域。令$B=F\times G$，若f：$B\to R^1$为有界，则有

$$\overline{\int}_{F\times G} f dV_{m+n} \geqslant \overline{\int}_{F}\left[\overline{\int}_{G} f dV_n\right] dV_m \qquad (A)$$

$$\overline{\int}_{F\times G} f dV_{m+n} \geqslant \overline{\int}_{G}\left[\overline{\int}_{F} f dV_m\right] dV_n \qquad (B)$$

$$\underline{\int}_{F\times G} f dV_{m+n} \leqslant \underline{\int}_{F}\left[\underline{\int}_{G} f dV_n\right] dV_m \qquad (C)$$

$$\underline{\int}_{F\times G} f dV_{m+n} \leqslant \underline{\int}_{G}\left[\underline{\int}_{F} f dV_m\right] dV_n \qquad (D)$$

证明 这四个不等式的证明方法和证明过程相似，所以只须证其中之一，譬如（A），即可代替全部的证明。

设$\varepsilon>0$，由引理4，存在$\delta>0$，使对B的任何分划，只要$|P|<\delta$，便有

$$U(f,P)<\overline{\int}_{B=F\times G} f dV_{m+n}+\varepsilon \qquad (2)$$

令$F=\{F_1,F_2,\cdots,F_p\}$，$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_q\}$分别为F与G的分划，它们的模小于$\delta/\sqrt{2}$，则一切$F_i\times G_j$（$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$）便构成$B=F\times G$的模小于δ的一个分划。设这个分划为P，并令

$$M_{ij}=\sup_{(x,y)\in F_i\times G_j} f(x,y),\quad m_{ij}=\inf_{(x,y)\in F_i\times G_j} f(x,y)$$

由定理11，$V_{m+n}(F_i\times G_j)=V_m(F_i)\cdot V_n(G_j)$，故

$$U(f, P)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}V_{m+n}(F_i\times G_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}V_m(F_i)V_n(G_j)$$

对每个$x\in F_i$，有

$$\sum_{j=1}^{q}M_{ij}V_n(G_j)\geqslant\overline{\int}_G f(x, y)dV_n$$

故若置

$$M_i=\sum_{j=1}^{q}M_{ij}V_n(G_j)$$

则有

$$U(f, P)=\sum_{i=1}^{p}M_iV_m(F_i)\geqslant\overline{\int}_F\left[\overline{\int}_G f(x, y)dV_n\right]dV_m$$

即

$$\overline{\int}_{F\times G}fdV_{m+n}+\varepsilon>U(f, P)>\overline{\int}_F\left[\overline{\int}_G f(x, y)dV_n\right]dV_m$$

由ε的任意性，便得（A）。

由此可知，若f在$B=F\times G$上可积，并且对每一个$y\in G$，$f(x, y)$在F上可积，或者对每一个$x\in F$，$f(x, y)$在G上可积，则有

$$\int_{F\times G}fdV_{m+n}=\int_G\left[\int_F f(x, y)dV_m\right]dV_n$$

或

$$\int_{F\times G}fdV_{m+n}=\int_F\left[\int_G f(x, y)dV_n\right]dV_m$$

成立

更有进者，我们还可以把上述结果推广到更一般的情况。

推论 设F是R^m的一个有容积区域，并且假定对每个$x\in F$，都对应着R^n内的一个有容积区域G_x，令$B=\{(x,y):x\in F,\ y\in G_x\}$，如果$f: B\to R^1$在$B$上可积，并且对每一个$x\in F$，$f$在$G_x$上可积，则

$$\phi(x)=\int_{G_x} f(x,y)\,dV_n$$

在F上可积，并且有

$$\int_B f(x,y)\,dV_{m+n}=\int_F\left[\int_{G_x} f(x,y)\,dV_n\right]dV_m$$

证明 令$A=H\times G$是R^{m+n}内含有B的区间，于是$F\subset H$，并且对每一个$x\in F$，有$G_x\subset G$，在A上定义函数

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in B \\ 0, & (x,y)\in A\setminus B\end{cases}$$

$f^*(x,y)$在A上可积，当且仅当$f(x,y)$在B上可积。故由定理，有

$$\int_{H\times G} f^*\,dV_{m+n}=\int_H\left[\int_G f^*\,dV_n\right]dV_m$$

而

$$\int_{H\times G} f^*\,dV_{m+n}=\int_B f\,dV_{m+n}$$

$$\int_G f^*\,dV_n=\int_{G_x} f\,dV_n$$

故

$$\int_B f\,dV_{m+n}=\int_H\left[\int_{G_x} f\,dV_n\right]dV_m=\int_F\left[\int_{G_x} f\,dV_n\right]dV_m$$

$$+\int_{H\setminus F}\left[\int_{G_x} f\,dV_n\right]dV_m=\int_F\left[\int_{G_x} f\,dV_n\right]dV_m$$

特别，当$B=\{(x, y), a\leqslant x\leqslant b, g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\}$为$R^2$内的区域时，有

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{G(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

最后我们要指出，尽管有定理12及其推论，但在定理条件不满足的情况下，是不能化重积分为累次积分的。因为累次积分存在而重积分不存在，抑或重积分存在而累次积分不存在的情况，是不时会发生的。

例1 设t是一有理数。我们用q_t表示$t=\dfrac{p}{q}$之分母，其中p，q是两互素整数，且$q\geqslant 1$，在R^2的单位区间$[0, 1; 0, 1]$上定义函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & \text{当}x, y\text{都是有理数时,}\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

因为若$f(x, y)=\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}>\varepsilon$，必为$\dfrac{1}{q_x}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$或$\dfrac{1}{q_y}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，而对于$[0, 1]$中的有理数，使$\dfrac{1}{q_x}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$的点$x$与使$\dfrac{1}{q_y}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$的点$y$只多有限个。设它们分别是$x_1, x_2, \cdots, x_k$及$y_1, y_2, \cdots, y_p$，故使$f(x, y)>\varepsilon$的点$(x, y)$必然只能落在有限条直线$x=x_1, x=x_2, \cdots, x=x_k$及$y=y_1, y=y_2, \cdots, y=y_p$上。从而集

$$E=\{(x,y): f(x,y)\geqslant\varepsilon, (x,y)\in[0,1]^2\}$$

的容积为零。故由积分存在充要条件（参见习题3），知f为可积。然而并不是对每一个y，$f(x, y)$总是关于x可积分的。因为，如果y是确定的有理数时，便有

$$\varphi_y(x)=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & x\text{为有理数时,}\\ 0, & x\text{为无理数时,}\end{cases}$$

显然，在x的任何一个区间上，$\varphi_y(x)=f(x,y)$有振幅$>\dfrac{1}{q_y}$，所以关于x不可积，亦即累次积分不存在。

例 2　设在$[0,1]^2$上定义了函数f如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}3y^2, & x\text{为有理数时}\\ 1, & x\text{为无理数时}\end{cases}$$

不难验证累次积分

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

存在，然而f在$[0,1]^2$上不可积。

4.2　重积分的变量替换

为了使重积分的计算简化，往往需要施行积分变量的替换。众所周知，对于单变量的积分$\int_a^b f(x)dx$，若通过变量替换$x=g(u)$，$dx=g'(u)du$，积分便变成

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[g(u)]g'(u)du$$

其中$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$，对重积分也有类似的结果，但形式上以及证明上则比单积分要复杂得多。为此，我们先来证明几个必要的定理。

定义　设G是R^n内的一个开集，F：$G\to R^n$是C^1类双射。记f的分量为f_1，f_2，…，f_n。并设k是1与n之间的一个固定正整数，且在G内，$D_kf_k>0$（或<0），而当$i\neq k$时，有

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i$$

我们称具有上述性质的函数为G上的一个原始函数。

如果F是原始函数，显然有

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\neq 0$$

定理13 设G是R^n内的一个开集，F：$G\to R^n$是$C^1(G)$类函数，并且有分量为f_1，f_2，…，f_n，如果在$X_0\in G$处，

$$\det F'(X_0)=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{X_0}\neq 0 \quad (1)$$

则在X_0的某个邻域内，函数F可以分解为n个原始函数的复合：

$$F=g_n\circ g_{n-1}\circ\cdots\circ g_2\circ g_1$$

其中每一个g_i都是原始函数，并在X_0的某个邻域内具有逆映射。

证明 由于$F\in C^1(G)$故$\det F'(X)$是X的连续函数。所以在X_0的某个邻域内，$\det F'(X)\neq 0$，而（1）的成立，表明此Jacobian行列式中，至少存在一个（$n-1$）阶子行列式在X_0的近旁不为零。为方便计，不妨假设

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}\right|_{X_0}\neq 0$$

（不然，总可以通过对变量与f的分量重新编序而满足这一要求），并且重复以上考虑，可以不失一般性地假定对$j=1$，2，…，n，下列各阶行列式在X_0的某个近旁均不为零

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_j)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_j)} \neq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

现在我们来构造原始函数g_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）。首先引入$g_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$如下：

$$g_1: \begin{cases} x_1^{(1)} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2^{(1)} = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(1)} = x_n \end{cases} \qquad (2)$$

由于

$$\left.\frac{\partial(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_{X_0} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X_0} \neq 0$$

所以g_1在X_0近旁存在逆映射

$$g^{-1}_1: \begin{cases} x_1 = h_1^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) \\ x_2 = x_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n^{(1)} \end{cases} \qquad (3)$$

并将（3）代入（2）之第一式，得恒等式

$$x_1^{(1)} \equiv f_1(h_1^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}), x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) \qquad (4)$$

然后引入$g_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})$如下：

$$
g_2:\begin{cases}
x_1^{(2)}=x_1^{(1)} \\
x_2^{(2)}=f_2(x_1,\cdots,x_n)= \\
\qquad f_2(h_1^{(1)}(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}),x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}) \\
x_3^{(2)}=x_3^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(2)}=x_n^{(1)}
\end{cases}
\qquad (5)
$$

容易验证，g_2在$g_1(X_0)$的某个邻域内存在逆映射。事实上，由（5），得

$$
\frac{\partial(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})}{\partial(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})}=\frac{\partial x_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}}
$$

然而对（4）及（5）之第二式，关于$x_2^{(1)}$求偏导，有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2^{(1)}}=0 \\[2ex]
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2^{(1)}}=\dfrac{\partial x_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}}
\end{cases}
$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial x_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}}\end{cases}$$

由于$\left.\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|_{X_0}\neq 0$，因而方程

$$\begin{cases}a_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+a_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}=0\\[2ex]a_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}+a_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial x_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}}\end{cases}$$

有非零解$a_1=\dfrac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}}$，$a_2=1$，故必须$\dfrac{\partial x_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}}\neq 0$，从而

g_2在$g_1(X_0)$近旁可逆。

此外，考虑到

$$x_1^{(2)}=x_1^{(1)}=f_1(x_1, \cdots, x_n)$$

$$x_2^{(2)}=f_2(x_1, \cdots, x_n)$$

$$x_3^{(2)}=x_3^{(1)}=x_3$$

………………

$$x_n^{(2)} = x_n^{(1)} = x_n$$

故有

$$g_2 \circ g_1: \begin{cases} x_1^{(2)} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2^{(2)} = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_3^{(2)} = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(2)} = x_n \end{cases} \qquad (5')$$

由于 $\left.\dfrac{\partial(x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|_{X_0} = \left.\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|_{X_0} \neq 0$，

故在X_0近旁，还存在$(x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})$与$(x_1, \cdots, x_n)$之间关系

$$(g_2 \circ g_1)^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1}: \begin{cases} x_1 = h_1^{(2)}(x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}) \\ x_2 = h_2^{(2)}(x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}) \\ x_3 = x_3^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n^{(2)} \end{cases} \qquad (6)$$

下面我们用归纳法来完成证明。假设我们已构造第ν个原始函数$g_\nu = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots, x_n^{(\nu)})$如下：

$$
g_\nu:\begin{cases}
x_1^{(\nu)}=x_1^{(\nu-1)}\\
x_2^{(\nu)}=x_2^{(\nu-1)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_\nu^{(\nu)}f_\nu(x_1,\cdots,x_n)=f_\nu(h_1^{(\nu-1)}(x_1^{(\nu-1)},\\
\quad\cdots,x_n^{(\nu-1)}),h_2^{(\nu-1)}(x_1^{(\nu-1)},\cdots,x_n^{(\nu-1)}),\\
\cdots,h_{\nu-1}^{(\nu-1)}(\cdots),x_\nu^{(\nu-1)},\cdots,x_n^{(\nu-1)})\\
x_{\nu+1}^{(\nu)}=x_{\nu+1}^{(\nu-1)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n^{(\nu)}=x_n^{(\nu-1)}
\end{cases}
\tag{7}
$$

并且假定

i） g_ν在$g_{\nu-1}\circ\cdots\circ g_1(X_0)$的某个邻域内可逆，

ii） 在X_0近旁，$(x_1^{(\nu)},\ x_2^{(\nu)},\ \cdots,\ x_n^{(\nu)})$与

$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$之间存在如下关系

$$
\begin{array}{l}(g_\nu\circ\cdots g_1)^{-1}=g_1^{-1}\\ \circ\cdots\circ g_{\nu-1}^{-1}\circ g_\nu^{-1}:\end{array}
\begin{cases}
x_1=h_1^{(\nu)}(x_1^{(\nu)},x_2^{(\nu)},\cdots,x_n^{(\nu)})\\
x_2=h_2^{(\nu)}(x_1^{(\nu)},x_2^{(\nu)},\cdots,x_n^{(\nu)})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_\nu=h_\nu^{(\nu)}(x_1^{(\nu)},x_2^{(\nu)},\cdots,x_n^{(\nu)})\\
x_{\nu+1}=x_{\nu+1}^{(\nu)}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n=x_n^{(\nu)}
\end{cases}
\tag{8}
$$

iii) $g_v \circ \cdots \circ g_1 = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_v(x_1, \cdots, x_n), x_{v+1}, \cdots, x_n)$

$$(9)$$

iv) 以（8）代入（9），得恒等式

$$\begin{cases} x_1^{(v)} = f_1(h_1^{(v)}(x_1^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}), h_2^{(v)}(\cdots), \cdots, \\ \quad h_v^{(v)}(\cdots), x_{v+1}^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}) \\ x_2^{(v)} = f_2(h_1^{(v)}(x_1^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}), h_2^{(v)}(\cdots)\cdots, \\ \quad h_v^{(v)}(\cdots), x_{v+1}^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}) \\ \cdots\cdots \\ x_v^{(v)} = f_v(h_1^{(v)}(x_1^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}), h_2^{(v)}(\cdots), \\ \quad \cdots, h_v^{(v)}(\cdots), x_{v+1}^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}) \end{cases} \quad (10)$$

现在构造原始函数$g_{v+1} = \left(x_1^{(v+1)}, x_2^{(v+1)}, \cdots, x_n^{(v+1)}\right)$

如下：

$$g_{v+1}: \begin{cases} x_1^{(v+1)} = x_1^{(v)} \\ \cdots\cdots \\ x_v^{(v+1)} = x_v^{(v)} \\ x_{v+1}^{(v+1)} = f_{v+1}(x_1, \cdots, x_n) = \\ f_{v+1}(h_1^{(v)}(x_1^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}), \cdots, \\ \quad h_v^{(v)}(\cdots), x_{v+1}^{(v)}, \cdots, x_n^{(v)}) \quad (11) \\ x_{v+2}^{(v+1)} = x_{v+2}^{(v)} \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(v+1)} = x_n^{(v)} \end{cases}$$

我们验证，$g_{\nu+1}$在$g_\nu\circ\cdots\circ g_1(X_0)$的某个邻域内可逆。事实上，

$$\frac{\partial(x_1^{(\nu+1)},\cdots,x_n^{(\nu+1)})}{\partial(x_1^{(\nu)},\cdots,x_n^{(\nu)})}=\frac{\partial x_{\nu+1}^{(\nu+1)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}$$

但对（10）以及（11）之第$\nu+1$式，对变量$x_{\nu+1}^{(\nu)}$求偏导，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\nu}\cdot\dfrac{\partial h_\nu^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{\nu+1}}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (12)\\ \dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\cdots+\dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}\cdot\dfrac{\partial h_\nu^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\dfrac{\partial f_\nu}{\partial x_{\nu+1}}=0\\ \dfrac{\partial f_{\nu+1}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h_1^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\cdots+\dfrac{\partial f_{\nu+1}}{\partial x_\nu}\cdot\dfrac{\partial h_\nu^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}+\dfrac{\partial f_{\nu+1}}{\partial x_{\nu+1}}=\\ \qquad\dfrac{\partial x_{\nu+1}^{(\nu+1)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}\end{cases}$$

由于$\left.\dfrac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{X_0}\neq 0$，故若用$\dfrac{\partial h_j^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}}$换成$a_j$（$1\leqslant j\leqslant\nu$）用$a_{\nu+1}$换成1，则（12）可以看成是$(a_1,a_2,\cdots,a_{\nu+1})$为未知元的线性方程组，而$\left(\dfrac{\partial h_1^{(\nu)}}{\partial x_{\nu+1}^{(\nu)}},\right.$ $\cdots$，

$\dfrac{\partial h_{v}^{(v)}}{\partial x_{v+1}^{(v)}}$，1）是它的一组非零解，而此方程组的系数所成

行列式不等于零，所以$\dfrac{\partial x_{v+1}^{(v+1)}}{\partial x_{v+1}^{(v)}}$不可能等于零，从而$g_{v+1}$可逆。

从上构造过程可以看出，有$g_{v+1}\circ g_{v}\circ\cdots\circ g_{1}(X)=(f_{1}(x_{1},\cdots,x_{n}),\cdots,f_{v+1}(x_{1},\cdots,x_{n}),x_{v+2},\cdots,x_{n})$。继续上述过程，直至构造出$g_{n}$为止，可使每一个映射$g_{i}$（$i=1,2,\cdots,n$）在$g_{i-1}\circ g_{i-2}\circ\cdots\circ g_{1}(X_{0})$近旁可逆，并且有

$$g_{n}\circ g_{n-1}\circ\cdots\circ g_{1}=F=(f_{1},f_{2},\cdots,f_{n})$$

证毕。

例　设$F=(y_{1},y_{2})$，其中

$$y_{1}=f_{1}(x_{1},x_{2})=x_{1}+x_{2}$$

$$y_{2}=f_{2}(x_{1},x_{2})=x_{1}+x_{2}^{2}$$

有

$$\frac{\partial(f_{1},f_{2})}{\partial(x_{1},x_{2})}\begin{vmatrix}1&1\\1&2x_{2}\end{vmatrix}=2x_{2}-1$$

故在$X_{0}=(0,0)$近旁，F可分解为g_{1}与g_{2}的复合，其中$g_{1}=(x_{1}^{(1)},x_{2}^{(1)})$，$g_{2}=(x_{1}^{(2)},x_{2}^{(2)})$，具体的表达式为

$$g_1: \begin{cases} x_1^{(1)} = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ x_2^{(1)} = x_2 \end{cases}$$

$$g_2: \begin{cases} x_1^{(2)} = x_1^{(1)} \\ x_2^{(2)} = f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 = x_1^{(1)} \quad x_n^{(1)} + \\ \qquad (x_2^{(1)})^2 \end{cases}$$

容易验证$\mathrm{F} = g_2 \circ g_1$。

引理5 设$G \subset \mathrm{R}^n$为开集，$\mathrm{F}: G \to \mathrm{R}^n$为一对一的$C^1$类原始函数。$k$为1与$n$之间的某个固定整数，并且当$i \neq k$时，$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$，$D_k f_k > 0$（或$< 0$），其中$f_i$为F的第$i$个分量。则

a） 若E为G的一个有容积子集，并且$\overline{E} \subset G$，则$\mathrm{F}(E)$也有容积。

b） 记$G_1 = \mathrm{F}(G)$，并设$K: G_1 \to \mathrm{R}^1$在G_1上一致连续。则有如下变量替换公式

$$\int_E K[\mathrm{F}(\mathrm{X})] \, |J(\mathrm{X})| \, dV_n = \int_{\mathrm{F}(E)} K(u) du \qquad (13)$$

其中记$\det \mathrm{F}'(\mathrm{X}) = J(\mathrm{X})$。

证明

（a） 设E是G内的一个n维闭区间，即

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

则集$S = \mathrm{F}(E)$即为由满足下列性质的点$(u_1, u_2, \cdots,$

u_n）的全体：

$$a_i \leqslant u_i \leqslant b_i, \quad (i \neq k)$$

$$f_k(x_1, \cdots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \leqslant u_k \leqslant$$
$$f_k(x_1, \cdots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

故由定理12之推论，$S=\mathrm{F}(E)$的容积$V(S)$为

$$V(S)=V(\mathrm{F}(E))=\int_{A_k}[f_k(x_1,\cdots, b_k, \cdots, x_n) - f_k(x_1, \cdots, a_k, \cdots, x_n)]dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_n=\int_E D_k f_k(\mathrm{X})dV_n=\int_E |J(\mathrm{X})|dV_n$$

其中A_k是这样的一个$n-1$维区间，其变量x_i（$i\neq k$）的变化范围是a_i到b_i。此时

$$\det\mathrm{F}'(\mathrm{X})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_k & D_2f_k & \cdots & D_nf_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=D_kf_k>0$$

故当E是n维区间时，引理5之（a）是正确的。从而对E是$n-$区间有限并集时也是正确的。

如果E是任意的有容积区域，则存在$n-$区间有限并集A、B，满足

$$A\subset E\subset B, \ \overline{B}\subset \mathrm{G}, \ \overline{V}(B\setminus A)<\varepsilon$$

从而

$$V[\mathrm{F}(A)]=\int_A |J(\mathrm{X})|dV_n,$$

$$V(\mathbf{F}(B)] = \int_B |J(\mathbf{X})| dV_n$$

$$V[\mathbf{F}(A)] \leqslant V^-[\mathbf{F}(E)] \leqslant V^+[\mathbf{F}(E)] \leqslant V[\mathbf{F}(B)]$$

因为$\mathbf{F} \in C^1$，所以$|J(\mathbf{X})|$在$\bar{B}$上一致连续，从而有界，设$|J(\mathbf{X})| \leqslant M$，因之

$$V^+[\mathbf{F}(E)] - V^-[\mathbf{F}(E)] \leqslant \int_{B \setminus A} |J(\mathbf{X})| dV_n \leqslant M \cdot V(B \setminus A) \leqslant M \cdot \varepsilon$$

由ε的任意性，得

$$V^+[\mathbf{F}(E)] = V^-[\mathbf{F}(E)]$$

换言之，$\mathbf{F}(E)$有容积，不仅如此，我们还同时证明了，当$K(\mathbf{X}) = 1$时，公式（13）是正确的。这是因为有

$$\int_E |J(\mathbf{X})| dV_n = V[\mathbf{F}(E)] = \int_{\mathbf{F}(E)} du = \int_{\mathbf{F}(E)} K(u) du$$

（b） 由于$K[F(\mathbf{X})]|J(\mathbf{X})|$在$\bar{E}$上一致连续，所以在$E$上可积。我们用Riemann和来逼近（13）中两边的每一个积分。

由于积分$\int_E K[\mathbf{F}(\mathbf{X})]|J(\mathbf{X})|dV_n$存在，故对任给的$\varepsilon > 0$，存在$\delta_1 > 0$，使得对$E$的任意一个分划$P = \{E_1, E_2, \cdots, E_p\}$，只要$|P| < \delta_1$，便有

$$\left| \sum_{i=1}^{p} K[\mathbf{F}(\xi_i)] |J(\xi_i)| V_n(E_i) - \int_E K[\mathbf{F}(\mathbf{X})] |J(\mathbf{X})| dV_n \right| < \varepsilon / 3 \quad (14)$$

其中ξ_i为E_i内任意一点。同样，由于积分$\int_{F(E)}K(u)du$存在，故对上述的ε，存在$\eta>0$，使得对$F(E)$的任意一个分划$\overline{P}=\{E_1, E_2, \cdots, E_q\}$，只要$|\overline{P}|<\eta$，便有

$$\left|\sum_{i=1}^{q}K(\bar{\xi}_i)V_n(\bar{E}_i)-\int_{F(E)}K(u)du\right|$$

$$<\varepsilon/3 \qquad (15)$$

其中$\bar{\xi}_i$为$\bar{E}_i$内任意一点。

设$M=\sup\limits_{u\in F(E)}|K(u)|$，由于$F$和$|J|$在$E$上的一致连续性，故可选$\delta_2>0$，使得对任意$X'$、$X''\in E$，只要$|X'-X''|<\delta_2$，便有

$$|F(X')-F(X'')|<\eta \text{ 及 } \Big||J(X')|-|J(X'')|\Big|<\frac{\varepsilon}{3MV_n(E)} \qquad (16)$$

取$\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$，并使$|P|<\delta$，令$\bar{\xi}_i=F(\xi_i)$，$E_i'=F(E_i)$（$1\leqslant i\leqslant q$）则$P'=\{E_1', E_2', \cdots E_q'\}$是$F(E)$的一个分划，且$|P'|<\eta$，故（15）成立。

令m_i和M_i分别为$|J(X)|$在E_i上的上确界与下确界。利用刚证结果a)，以及积分的中值定理，有

$$V_n(E_i')=\int_{E_i}|J(X)|dV_n=|J_i|V_n(E_i) \qquad (17)$$

其中$m_i\leqslant|J_i|\leqslant M_i$，估计两个Riemann和的差，

$$\left|\sum_{j=1}^{q}K(\bar{\xi}_i)V_n(E_j')-\sum_{j=1}^{q}K[F(\xi_i)]|J(\xi_i)|\cdot V_n(E_i)\right|=\left|\sum_{j=1}^{q}[K(\bar{\xi}_i)|J_i|V_n(E_i)\right.$$

$$-K(\bar{\xi}_i)|J(\xi_i)|V_n(E_i)]|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{q}K(\bar{\xi}_i)[|J_i|-|J(\xi_i)|]V_n(E_i)\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3MV_n(E)}M\cdot V_n(E)=\frac{\varepsilon}{3}$$

故由（14）和（15），得

$$\left|\int_E K[\mathrm{F}(X)]|J(X)|dV_n-\int_{\mathrm{F}(E)}K(u)dV_n\right|$$

$$\leqslant\left|\int_E K[\mathrm{F}(X)]|J(X)|dV_n-\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{q}K[\mathrm{F}(\xi_i)]|J(\xi_i)|V_n(E_i)\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{q}K[\mathrm{F}(\xi_i)]|J(\xi_i)|V_n(E_i)-\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{q}K(\bar{\xi}_i)V_n(E_i)\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{q}K(\bar{\xi}_i)V_n(E_i)-\int_{\mathrm{F}(E)}K(u)dV_n\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由 ε 的任意性，（b）便证。

定理14（变量替换公式） 设G为R^n的开集，F：$G\to\mathrm{R}^n$为C^1类双射，并且在G上，$\det\mathrm{F}'(X)\neq 0$，设D是含在G内的有容积的有界闭集，则$\mathrm{F}(D)$有容积。此外，若设K：$\mathrm{F}(D)\to\mathrm{R}^1$在$\mathrm{F}(D)$连续，则

$$\int_{\mathrm{F}(D)}K(u)dV_n=\int_D K[\mathrm{F}(X)]|J(X)|dV_n \tag{18}$$

其中$J(X)=\det F'(X)$。

证明　由定理13，可以在每一个$X\in G$的某个邻域$G_x\subset G$内，把F分解为n个原始函数的复合

$$F=g_n\circ g_{n-1}\circ\cdots\circ g_2\circ g_1 \qquad (19)$$

假定有界闭集$E\subset G_x$，由引理（5）之a），知$g_1(E)$有容积。从而$g_2\circ g_1(E)$有容积。依此类推，最后知$F(E)=g_n\circ g_{n-1}\circ\cdots\circ g_2\circ g_1(E)$有容积。并由引理（5）之），有

$$\int_{F(E)}K(u)\,dV_n=\int_{g_n\circ\cdots g_1(E)}K(u)\,dV_n=$$

$$\int_{g_{n-1}\circ\cdots\circ g_1(E)}K[g_n(u)]\,|\det g_n'(u)|\,dV_n$$

定义

$$K_1(u)=K[g_n(u)]\,|\det g_n'(u)|$$

则$K_1(u)$在$g_{n-1}\circ\cdots\circ g_1(E)$上连续。再次应用引理5，得

$$\int_{F(E)}K(u)\,dV_n=\int_{g_{n-1}\circ\cdots g_1(E)}K_1(u)\,dV_n=$$

$$\int_{g_{n-2}\circ\cdots g_1(E)}K_1[g_{n-1}(u)]\,|\det g'_{n-1}(u)|\,dV_n$$

$$=\int_{g_{n-2}\circ\cdots\circ g_1(E)}K[g_n(g_{n-1}(u))]\,|\det g_n'(g_{n-1}(u)|$$

$$|\det g'_{n-1}(u)|\,dV_n$$

由Jacobian行列式的性质

$$|\det g_n'(g_{n-1}(u))|\,|\det g'_{n-1}(u)|=|\det h_2'(u)|$$

其中$h_2(u)=(g_n\circ g_{n-1})(u)$。记

$$K_2(u)=K[h_2(u)]\,|\det h_2'(u)|$$

又有

$$\int_{F(E)}K(u)dV_n=\int_{g_{n-2}\circ\cdots\circ g_1(E)}K_2(u)dV_n$$

逐次对g_{n-2}，g_{n-3}，…，g_2应用引理5，并依次定义

$$h_p(u)=g_n\circ g_{n-1}\circ\cdots\circ g_{n-p+1}(u)$$

及

$$K_p(u)=K[h_p(u)]\,|\det h_p'(u)|$$

$$(p=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$

最后有

$$\int_{F(E)}K(u)dV_n=\int_{g_1(E)}K[h_{n-1}(u)]$$

$$|\det h_{n-1}'(u)|dV_n=$$

$$\int_E K[F(u)]\,|\det F'(u)|dV_n \qquad (E\subset G_x)$$

以上证明了在每一个$X\in G$的近旁区域G_x内，如果E是G_x内的有界闭集，则公式（18）在E内成立。现在将此推广到G内任意一个有界闭集D的情形。因为对每一个$X_0\in G$，都相应地存在着一个包含X_0的区域G_{x_0}，在此区域内，F可以分解为原始函数的复合（19），并且对任何含在其内的有界闭集E上，公式（18）成立。于是在D上存在着一个开复盖$\mathscr{U}$。使对$\mathscr{U}$的每一个成员，含在其内的每一个有界闭集上，公式（18）成立。由Lebesgue定理(第四章习题25)，存在$\rho>0$，使D内任何直径小于ρ的子集，整个地包含在$\mathscr{U}$的某个成员内。因之，我们可以将D分为有限个有容积

的区域D_1，D_2，…，D_s，（$\bigcup_{i=1}^{s} D_i = D$，且对$i \neq j$，$D_i$与$D_j$无公共内点（$1 \leqslant {i \atop j} \leqslant s$），不仅F（$D_i$）有容积，而且等式（18）在每一个$D_i$上成立：

$$\int_{F(D_i)} K(u)\, dV_n = \int_{D_i} K[F(u)]\, |\det F'(u)|\, dV_n$$

$$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

将这S个等式两边分别相加，便得公式（18）。

例 计算

$$\int_E x_1 dV_2$$

其中E是由如下三条抛物线所围成的平面区域

$$x_1 = -x_2^2 \qquad (\text{I})$$

$$x_1 = 2x_2 - x_2^2 \qquad (\text{II})$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - x_2^2 \qquad (\text{III})$$

解 作变量替换U＝G（X），G的分量为

$$G:\ \begin{cases} u_1 = x_1 + x_2^2 \\ u_2 = -x_1 + 2x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

映射G把（x_1，x_2）平面上的曲线（Ⅰ）映射为（u_1，u_2）平面上的直线Ⅰ′：$u_1 = 0$；把曲线（Ⅱ）射映为Ⅱ′：$u_2 = 0$；把曲线（Ⅲ）映射为Ⅲ′：$2u_1 + u_2 - 2 = 0$；把区域E映射为区域G（见图45）

由于
$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} +1 & 2x_2 \\ -1 & 2-2x_2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

故逆映射$G^{-1} = F$存在，且$|\det F'(u)| = \frac{1}{2}$，容易计算出F的

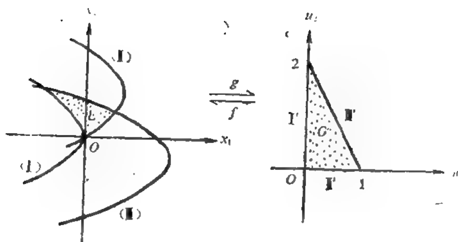

图 45

分量为

$$\mathbf{F}_1 \quad \begin{aligned} x_1 &= u_1 - \tfrac{1}{4}(u_1+u_2)^2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(u_1+u_2) \end{aligned}$$

故有

$$\int_E x_1 dV_2(x) = \int_{F(G)} x_1 dV_2(x)$$

$$= \int_G \left[u_1 - \tfrac{1}{4}(u_1+u_2)^2\right] |\det \mathbf{F}'(u)| dV_2(u)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 du_1 \int_0^{2-2u_1} \left[u_1 - \tfrac{1}{4}(u_1+u_2)^2\right] du_2 = \frac{1}{48}$$

最后，我们指出$|J(X)| = |\det \mathbf{F}'(X)|$的几何意义。设$P$是$R^n$内的长方体，它的各棱有长度为$dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$，其$n$维容积为$dx_1dx_2\cdots dx_n$，若$Y=F(X)$是$C^1$类函数，且$|\det \mathbf{F}'(X_0)| \neq 0$，则有

$$V[\mathbf{F}(P)] = \int_{F(P)} dV_n = \int_P |J| dV_n \doteq$$

$$|\det \mathbf{F}'(X_0)| dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\det \mathbf{F}'(X_0)| V(P)$$

所以$|\det \mathbf{F}'(X_0)|$可以看成是把P映射成$\mathbf{F}(P)$之容积的伸缩系数。

§5 微分形式和外微分

在微积分中，我们已经学过定积分、重积分、线积分和面积分，并且得到非常重要的Newton—Leibniz公式，Green公式，Gauss-Остроградский公式，Stokes公式。这些公式如果只局限在表面上，那么我们看到的只不过是这些积分间的一种关系。但实际上，它们都服从于某个统一的公式，即通常所说的Stokes公式。本节的目的就在于揭露它们之间的这一普遍规律。

5.1 坐标变换与空间的定向

一、容许坐标空间

我们知道，在$x-o-y$平面上的点P，可以表示成(x, y)，其中x，y是它的直角坐标。但如果令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，那么P也可以表示成(r, θ)，即通常的极坐标。由此可知，$\mathbf{R}^2$内的点是可以有多种描述的。这对$\mathbf{R}^n$来说也是如此。

一般而言，设：$\mathbf{F}: (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \cdots, y_n)$是$N(\subset\mathbf{R}^n)$到$M(\subset\mathbf{R}^n)$内的一对一且双方连续的$C^1$类映射。记$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基为$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\cdots$，$\mathbf{e}_n$。于是有

$$\mathbf{F}(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\,\mathbf{e}_i \qquad (1)$$

通常我们可以用两种观点来看待式(1)。

一种观点是把$\mathbf{F}$看成一种映射，即点的运动(变换)，它将N的点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$变为M的点$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$。此时象$\mathbf{F}(X)$的笛卡儿坐标便是$(f_1(X),$

$f_2(X)$, …, $f_n(X)$)。

另一种观点是把F看成是坐标变换，此时设想点X是不变的，坐标(x_1, x_2, …, x_n)是对点X的一种描述。由于(x_1, x_2, …, x_n)与($f_1(X)$, $f_2(X)$, …, $f_n(X)$)的对应是双方一对一的，所以($f_1(X)$, $f_2(X)$, …, $f_n(X)$)也可以看成是对点X的另一种描述，或者说，把它看成是X的另一种坐标。这样一来，不仅$x_1x_2\cdots x_n$是N的一个坐标空间，$y_1y_2\cdots y_n$也可以看成是N的一个坐标空间。当然反过来也一样，不仅$y_1y_2\cdots y_n$是M的一个坐标空间，$x_1x_2\cdots x_n$也可以看成是M的一个坐标空间。

设G是空间$x_1x_2\cdots x_n$内包含N的一个开集，并且假定F的Jacobian行列式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

在G内不变号，此时我们称由F得出的坐标空间$y_1y_2\cdots y_n$是N的一个容许坐标空间。

二、空间的定向

取定N的一个容许坐标空间$x_1x_2\cdots x_n$，并任意地把它规定是正向的(或反向的)坐标空间，对于N的另一个容许坐标空间$y_1y_2\cdots y_n$，如果满足

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} > 0$$

则称此坐标空间与坐标空间$x_1x_2\cdots x_n$是同向的；如果

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} < 0$$

则称此坐标空间与坐标空间$x_1x_2\cdots x_n$是反向的。

如果 $y_1y_2\cdots y_n$ 与 $z_1z_2\cdots z_n$ 都是 N 的容许坐标空间，并且都与 $x_1x_2\cdots x_n$ 同向（或反向），于是按规定，有

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}>0\ (\text{或}<0)\ \text{及}$$

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}>0\ (\text{或}<0).$$

但由Jacobian行列式的性质，有

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$$

$$=\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\Big/\frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}>0$$

所以坐标空间 $y_1y_2\cdots y_n$ 与坐标空间 $z_1z_2\cdots z_n$ 也是同向的。亦即说明坐标空间之间“有相同方向”的关系是一个等价关系（对称性与自反性很显然）。这样一来，N的一切容许坐标空间只能分成两大类：同类中的容许坐标空间都为同向；异类中的容许坐标空间都为异向。对N的容许坐标空间作了这样规定之后，我们就称N是定向的。

由于上述原因，所以我们把 R^3 的坐标空间 xyz, yzx, zxy属于一类而把坐标空间xzy，yxz，zyx属于另一类是有道理的。因为，例如有

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(y, z, x)}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1>0$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, z, y)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1<0$$

5.2 一次微分形式及其积分

一、 一次微分形式

设 $f:(x, y, z) \longmapsto \mathbf{R}^1$是$D(\subset \mathbf{R}^3)$上的可微函数。对固定的点$P$，$f$的微分$df(P)$是一个$\mathbf{R}^3$到$\mathbf{R}^1$的线性映射（见第五章§3），这个线性映射将$\mathbf{R}^3$中的任一点$(h_1, h_2, h_3)$映为实数

$$df(P)(h_1, h_2, h_3)=\frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot h_1+$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot h_2+\frac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot h_3$$

现在我们引入三个$\mathbf{R}^3$到$\mathbf{R}^1$的线性映射dx，dy与dz（实际上是空间xyz到其子空间x，y与z上的投影）。它们由下式定义：

$$dx:(h_1, h_2, h_3)\longmapsto h_1,$$

$$dy:(h_1, h_2, h_3)\longmapsto h_2,$$

$$dz:(h_1, h_2, h_3)\longmapsto h_3,$$

这样一来，微分$df(M)$便可以表示成三个线性映射的叠加

$$df(M)=\frac{\partial f}{\partial x}(M)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(M)dy+\frac{\partial f}{\partial z}(M)dz \quad (1)$$

定义 设Ω是$\mathbf{R}^3$的一个开集，a，b，c都是Ω上的可微函数，称形如

$$\omega=a(P)dx+b(P)dy+c(P)dz$$

的线性映射为Ω上的**一次微分形式**（简称1—形式）。

Ω上的一次微分形式的全体记为$\Lambda^1(\Omega)$，在$\Lambda^1(\Omega)$上

我们可以定义加法与数乘（以可微函数为数量）：

1° 若 $\sigma = a_1(P)dx + b_1(P)dy + c_1(P)dz$ 和 $\tau = a_2(P)dx + b_2(P)dy + c_2(P)dz$ 为 $\Lambda^1(\Omega)$ 的两个元素，则定义 σ 与 τ 之和为

$$\omega = \sigma + \tau = (a_1(P) + a_2(P))dx + (b_1(P) + b_2(P))dy + (c_1(P) + c_2(P))dz$$

2° 若 λ 是实数，$\sigma = a(P)dx + b(P)dy + c(P)dz \in \Lambda^1(\Omega)$，则定义 λ 和 σ 的乘积为

$$\omega = \lambda\sigma = \lambda a(P)dx + \lambda b(P)dy + \lambda c(P)dz$$

容易验证，$\Lambda^1(\Omega)$ 是一个线性空间（见第四章1.1）。

二、 1－形式的变量替换及其积分

若 $h:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 是 C^1 类一一映射，h 的分量为 $x = h_1(t)$，$y = h_2(t)$，$z = h_3(t)$，它将区间 $[\alpha,\beta]$ 映为 R^3 的一条有向曲线 M，其方向与 h 的切向量 (h_1', h_2', h_3') 方向相同。设

$$\omega = a(P)dx + b(P)dy + c(P)dz$$

是 $M(\subset R^3)$ 上的一个1－形式。称形式

$$\begin{aligned} h^*\omega &= a(h(t))dh_1 + b(h(t))dh_2 + c(h(t))dh_3 \\ &= a\circ h(t)\frac{dx}{dt}dt + b\circ h(t)\frac{dy}{dt}dt + c\circ h(t)\frac{dz}{dt}dt \\ &= \left[a\circ h(t)\frac{dx}{dt} + b\circ h(t)\frac{dy}{dt} + c\circ h(t)\frac{dz}{dt}\right]dt \end{aligned}$$

为 ω 在 h 变换下的1次微分形式。

我们定义，形式 ω 在 M 上的积分为

$$\int_M \omega = \int_{h^{-1}(M)} h^*\omega = \int_\alpha^\beta \left[a\circ h(t)\frac{dx}{dt} + b\circ h(t)\right.$$

$\frac{dy}{dt}+c\circ h(t)\frac{dz}{dt}]dt$

如果把M的反弧记为$-M$，则定义

$$\int_{-M}\omega=-\int_{M}\omega$$

这就是我们熟知的线积分（第二类）的变量替换公式。

例1 计算$\omega=zdx+xdy+ydz$ 在Γ上的积分，其中Γ为$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y=1$的交线，方向见图46。

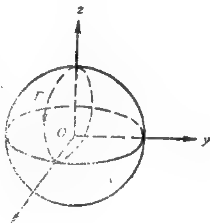

图 46

解 弧Γ在xy平面上的投影是椭圆$(2x-1)^2+2y^2=1$，故可引入参量t使

$$x=\frac{1+\cos t}{2},$$

$$y=\frac{\sin t}{\sqrt{2}},$$

$$z=1-x=\frac{1-\cos t}{2}$$

$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

所以有$\int_{\Gamma}\omega=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-\cos t}{2}\cdot\frac{-\sin t}{2}+\frac{1+\cos t}{2}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right.$

$$\left.+\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin t}{2}\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1+\cos t}{2\sqrt{2}}-\frac{\sin t}{4}+\frac{\sin t\cdot\cos t}{4}\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

5.3 二次微分形式及其积分

一、交错双线性映射$dx_i\wedge dx_j$，$(1\leqslant i,\ j\leqslant 3)$

为了叙述方便，我们把R^3的坐标空间xyz暂时改写为$x_1x_2x_3$。

设$h_1=(h_1^{(1)},\ h_2^{(1)},\ h_3^{(1)})$，$h_2=(h_1^{(2)},\ h_2^{(2)},\ h_3^{(2)})$是$R^3$的两个向量，我们定义$R^3\times R^3$到$R^1$的映射$dx_i\wedge dx_j$如下：

$$dx_i\wedge dx_j:\ (h_1,\ h_2)\longmapsto\begin{vmatrix}h_i^{(1)} & h_j^{(1)}\\ h_i^{(2)} & h_j^{(2)}\end{vmatrix}\quad(1\leqslant i,j\leqslant 3)$$

读者不难看出，数值$\begin{vmatrix}h_i^{(1)} & h_j^{(1)}\\ h_i^{(2)} & h_j^{(2)}\end{vmatrix}$是$h_1$，$h_2$所张成的平行四边形在$R^3$的子空间$x_ix_j$上的有向投影面积。

根据行列式的性质，映射$dx_i\wedge dx_j$有如下明显的性质：

a) $dx_i\wedge dx_j$对每一个h_k $(k=1,\ 2)$都是线性的，即有

$$dx_i\wedge dx_j(h_1'+h_1'',\ h_2)=dx_i\wedge dx_j(h_1',\ h_2)+dx_i\wedge dx_j(h_1'',\ h_2),$$

$$dx_i\wedge dx_j(h_1,\ h_2'+h_2'')=dx_i\wedge dx_j(h_1,h_2')+dx_i\wedge dx_j(h_1,\ h_2''),$$

b) $dx_i\wedge dx_j(\lambda h_1,\ h_2)=\lambda dx_i\wedge dx_j(h_1,\ h_2)$,

$dx_i\wedge dx_j(h_1,\ \lambda h_2)=\lambda dx_i\wedge dx_j(h_1,\ h_2)$,

c) $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$，

d) $dx_i \wedge dx_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$。

由于性质a)，b)，所以$dx_i \wedge dx_j$是一个双线性映射（形式）；由于性质c)，所以双线性形式$dx_i \wedge dx_j$是交错的（或反对称的）；由于性质c)，d)，所以在上述六个交错双线性形式$dx_i \wedge dx_j$中只有三个是独立的，例如$dx_2 \wedge dx_3$，$dx_3 \wedge dx_1$，$dx_1 \wedge dx_2$。

二、二次微分形式

现在我们再把坐标空间$x_1x_2x_3$的记法改回成xyz，于是，R^3的上述六个交错双线性形式中只有三个是独立的，譬如设它们是

$dy \wedge dz$，$dz \wedge dx$，$dx \wedge dy$。

定义 设Ω是R^3的一个开集，P，Q，R都是Ω上的可微函数，称形如

$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$的线性形式为Ω上的**二次微分形式**（简称2—形式），Ω上的二次微分形式的全体记为$\Lambda^2(\Omega)$，其上引入与5.2中类似的加法与数乘（以可微函数为数量），容易验证$\Lambda^2(\Omega)$是一个线性空间，而$dy \wedge dz$，$dz \wedge dx$，$dx \wedge dy$构成$\Lambda^2(\Omega)$的一个基。

三、外积（楔运算）

记号∧也可以看成是$\Lambda^1(\Omega)$内的一种运算，设$\sigma = Pdx + Qdy + Rdz \in \Lambda^1(\Omega)$，$\tau = Adx + Bdy + Cdz \in \Lambda^1(\Omega)$，我们使$\sigma \wedge \tau$成为一个2—形式，并且使它满足反对称性和双线性性，以及加法关于数乘的分配律。于是有

$\sigma \wedge \tau = (QC - BR)dy \wedge dz + (RA - CP)dz \wedge dx + (PB - AQ)dx \wedge dy$，这是一个2-形式。

运算$\wedge$称为外乘积或楔积。

四、二次微分形式的变量替换

设$\mathfrak{h}$：$(u, v) \longmapsto (x, y, z)$是$C^1$类映射，它将$(u, v)$平面上边长分别为$\Delta u$，$\Delta v$且边与坐标轴平行的小矩形$\Delta S$映为$xyz$空间的小曲面$\Delta\sigma$，并将直线段$AB$，$AD$分别映为曲线$\widehat{A'B'}$与$\widehat{A'D'}$（见图47、48），而由$\widehat{A'B'}$，$\widehat{A'D'}$的切向量

$$a = \mathfrak{h}'_u \Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Delta u$$

$$b = \mathfrak{h}'_v \Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Delta v$$

所张成的平行四边形T可以作为$\Delta\sigma$的一种近似

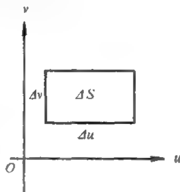

图 47

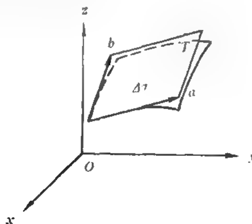

图 48

通过计算，容易得出

$$
\begin{cases}
dy\wedge dz(a,\ b)=\dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}\Delta u\Delta v \\
dz\wedge dx(a,\ b)=\dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}\Delta u\Delta v \\
dx\wedge dy(a,b)=\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\Delta u\Delta v
\end{cases}
\tag{1}
$$

它们是与$\Delta\sigma$相切的平行四边形T在坐标平面$x=0$，$y=0$，$z=0$上的有向投影面积，所以它们也可以作为$\Delta\sigma$在坐标平面$x=0$，$y=0$，$z=0$上的有向投影面积之近似。故有

$$
\begin{cases}
dy\wedge dz(a,\ b)\approx\cos\alpha\cdot d\sigma \\
dz\wedge dx(a,\ b)\approx\cos\beta\cdot d\sigma \\
dx\wedge dy(a,\ b)\approx\cos\gamma\cdot d\sigma
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$是$T$的单位法向量，$d\sigma$是$\Delta\sigma$的面积。

考虑到u，v是自变量，而且uv是自然定向的，因此如果视$u=u$，$v=v$，那么按定义便有

$$du\wedge dv(a,\ b)=\Delta u\cdot\Delta v$$

因此（1）可以改写成

$$
\begin{cases}
dy\wedge dz=\dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv \\
dz\wedge dx=\dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv \\
dx\wedge dy=\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv
\end{cases}
\tag{3}
$$

设h的分量为

$x=h_1(u,v)$，$y=h_2(u,v)$，$z=h_3(u,v)$ 考察 h_1，h_2，h_3的微分（为１—形式），有

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv \\ dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv \end{cases}$$

并计算它们之间的外积，例如$dx\wedge dy$，有

$$dx\wedge dy=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)du\wedge dv$$

$$=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv$$

所得结果与（３）相同，这就为我们实现微分形式的变量替换提供了依据。

定义 设h是将uv空间的开集D变到xyz空间内的一个C^1类映射，h的分量为

$x=h_1(u,v)$，$y=h_2(u,v)$，$z=h_3(u,v)$

设

$\omega=P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+R(x,y,z)dx\wedge dy$是$xyz$空间的一个２次微分形式，称

$$\mathrm{h}^*\omega=(P\circ \mathrm{h})(u,v)dh_2\wedge dh_3+(Q\circ \mathrm{h})(u,v)\,dh_3\wedge dh_1+(R\circ \mathrm{h})(u,v)dh_1\wedge dh_2$$

为ω在变换h下的二次微分形式。

将dh_1，dh_2，dh_3的微分表达式代入，有

$$\begin{aligned}\mathrm{h}^*\omega=&(P\circ \mathrm{h})(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right]\wedge\\&\left[\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right]+(Q\circ \mathrm{h})(u,v)\\&\left[\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right]\wedge\left[\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]\\&+(R\circ \mathrm{h})(u,v)\left[\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]\\&\wedge\left[\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right]=\left[(P\circ \mathrm{h})(u,v)\right.\\&\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+(Q\circ \mathrm{h})(u,v)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\\&\left.+(R\circ \mathrm{h})(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}\right]du\wedge dv\end{aligned}$$

例2 设$\omega=xyzdx\wedge dy$,h: $(u,v)\longmapsto(x,y,z)$，其中

$$\begin{cases}z=a\cos u\\x=a\sin u\\y=v\end{cases}\qquad (u,v)\in[0,\pi]\times[0,H]$$

则有

$$\mathrm{h}^*\omega=(a\sin u)\cdot v\cdot(a\cos u)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv$$

$$=a^3v\sin u\cos^2u\,du\wedge dv$$

五、二次微分形式的积分

由于第二类曲面积分中的$dydz$，$dzdx$和$dxdy$其涵义分别为S中的微元ΔS在平面$x=0$，$y=0$，$z=0$上的有向投影面积微元，故由四之(2)式，我们把第二类曲面积分

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

约定为形式$\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$在$S$上的积分是合理的，即有

$$\int_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$
$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

现在来考虑二次微分形式积分的变量替换。

若h：$(u, v) \longmapsto (x, y, z)$是$C^1(\Omega)$类一一映射，其分量为

$$x = h_1(u, v),\ y = h_2(u, v),\ z = h_3(u, v)$$

h将区域（即连通的开集）$D(\subset R^2)$映为R^3的一张有向曲面$M(\subset\Omega)$，法向量$\vec{n} = h_u' \times h_v'$指向的一侧规定为$M$的正侧。二次微分形式

$$\omega = P(x, y, z)dy\wedge dz + Q(x, y, z)dz\wedge dx + R(x, y, z)dx\wedge dy$$

在Σ上的积分定义为

$$\int_M \omega = \int_{h^{-1}(M)} h^*\omega = \int_D \Big[(P\circ h)(u,v)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$
$$+ (Q\circ h)(u, v)\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} +$$

$$(R\circ \mathfrak{h})(u, v)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big]du\wedge dv$$

如果沿M的负侧积分，则定义为

$$\int_{-M}\omega=-\int_{M}\omega$$

当u，v是自变量，并且uv是正向时，约定

$$\int_{D} f(u,v)du\wedge dv=\iint_{D} f(u, v)d\sigma$$

其中右式是$f(u, v)$在D上的二重积分。

例 3　设S是柱面$x^2+z^2=a^2$在$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$两卦限内被平面$y=0$及$y=H$所截下部分的外侧，试计算第二类曲线积分 $I=\iint\limits_{D} xyzdxdy$。

解　考察例 2 中的微分形式及其变换$\mathfrak{h}$。由于S规定的方向正好与$\mathfrak{h}'_u\times\mathfrak{h}'_v$的方向一致，所以有

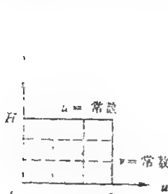

图　49

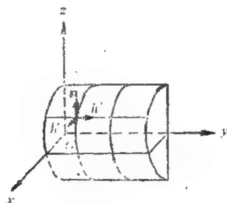

图　50

$$\iint_S xyzdxdy = \int_S xyzdx\wedge dy$$

$$= \int_{[0,\pi]\times[0,H]} a^3 v\sin u\cos^2 u du\wedge dv$$

$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,H]} a^3 v\sin u\cos^2 u d\sigma$$

$$= a^3\int_0^H vdv \int_0^\pi \cos^2 u\sin u du = \frac{a^3 H^2}{3}$$

5.4 三次微分形式及其积分

一、三次微分形式

设 $h_1 = (h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, h_3^{(1)})$，

$h_2 = (h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, h_3^{(2)})$，

$h_3 = (h_1^{(3)}, h_2^{(3)}, h_3^{(3)})$

是R^3的三个向量，与二次微分形式引出时相仿，我们定义$R^3\times R^3\times R^3$到R^1的线性形式

$$dx\wedge dy\wedge dz(h_1, h_2, h_3) = \begin{vmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & h_3^{(1)} \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & h_3^{(2)} \\ h_1^{(3)} & h_2^{(3)} & h_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

以及类似的线性形式：

$dx\wedge dz\wedge dy$，$dy\wedge dx\wedge dz$，$dy\wedge dz\wedge dx$，

$dz\wedge dx\wedge dy$，$dz\wedge dy\wedge dx$。

由行列式的性质，有

$$dx\wedge dy\wedge dz = dz\wedge dx\wedge dy = dy\wedge dz\wedge dx$$

$$dx\wedge dz\wedge dy = dy\wedge dx\wedge dz = dz\wedge dy\wedge dx$$

而

$$dx\wedge dy\wedge dz=-dx\wedge dz\wedge dy,\ \cdots\cdots$$

所以它们都是具有反对称性的三线性形式，而其中只有一个是独立的。通常取这个独立的交错三线性形式为$dx\wedge dy\wedge dz$。而值$dx\wedge dy\wedge dz(h_1, h_2, h_3)$代表了由$h_1, h_2, h_3$三向量张成的有向平行六面体的体积。

定义 设Ω是$\mathbf{R}^3$的一个区域，P是Ω上的可微函数。称形如

$$\omega=P(x, y, z)dx\wedge dy\wedge dz$$

的线性形式为Ω上的**三次微分形式**（简称3—形式）。

Ω上的三次微分形式全体记为$\Lambda^3(\Omega)$，并象$\Lambda^1(\Omega)$，$\Lambda^2(\Omega)$那样可以在$\Lambda^3(\Omega)$内定义加法和数乘（以可微函数为数量）而使$\Lambda^3(\Omega)$成为一个线性空间，它以$dx\wedge dy\wedge dz$为基向量。

这样我们便得到三个空间$\Lambda^1(\Omega)$，$\Lambda^2(\Omega)$和$\Lambda^3(\Omega)$，这些空间可以通过外积运算而联系起来。例如一个$\Lambda^1(\Omega)$的元素与一个$\Lambda^2(\Omega)$的元素的外积便是$\Lambda^3(\Omega)$的一个元素。

二、三次微分形式的积分及其变量替换

由于$dx\wedge dy\wedge dz(h_1, h_2, h_3)$是$\Omega$的体积微元$\Delta V$的近似（见图51），所以我们把三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV$约定为形式$\omega=f(x, y, z)dx\wedge dy\wedge dz$的积分，其中$xyz$是自然定向，即有

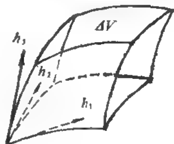

图 51

$$\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV$$

现在考察三次微分形式积分的变量替换。

设h是将uvw空间的区域D变到空间 xyz 内的区域Ω内的C^1类双方一对一映射，h 的分量为

$$x = h_1(u, v, w),\quad y = h_2(u, v, w),$$
$$z = h_3(u, v, w)$$

设 $\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$是空间$xyz$的一个 3 —形式，称

$$h^* \omega = (f \circ h)(u, v, w)\, dh_1 \wedge dh_2 \wedge dh_3$$

是 ω在变换 h 下的三次微分形式，将dh_1，dh_2，dh_3 的微分表达式代入，有

$$h^* \omega = (f \circ h)(u, v, w) \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\, du \wedge dv \wedge dw$$

并定义

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{h^{-1}(\Omega)} h^* \omega$$

这实际上就是重积分的变量替换公式。

5.5 推广

我们前面讨论的 1 —形式，2 —形式和 3 —形式以及它们的积分都限定在 $\mathbb{R}^3$ 内，但它们完全可以推广到任意的$\mathbb{R}^n$上，例如：

1° 在 $\mathbb{R}^2$ 内，$D(\subset \mathbb{R}^2)$上的一次微分形式为$\sigma = f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$，二次微分形式为$\tau = f(x, y)\, dx \wedge dy$，它们的积分是：

$$\int_{l} \sigma = \int_{h^{-1}_{(l)}} h^{*}\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} [(f\circ h)(t)\frac{dx}{dt} + (g\circ h)(t)\frac{dy}{dt}] dt$$

（其中l是R^2内的有向曲线，它是〔α，β〕在一一映射h下的象，方向与切向量一致。）

$$\int_{D} f(x, y)dx\wedge dy = \iint_{D} f(x, y)d\sigma$$

（xy为正向坐标空间）或

$$\int_{D} f(x, y)dx\wedge dy = \int_{h^{-1}(D)} (f\circ h)(u, v)\cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du\wedge dv$$

2° 设

$$h_i = (h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \cdots, h_n^{(i)}), (1\leqslant i\leqslant k)$$

是R^n的k个向量，我们一样可以定义$\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{k}$到$R^1$内的交错$k$重线性形式：

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}(h_1, h_2\cdots, h_k)$$

$$= \begin{vmatrix} h_{i_1}^{(1)} & h_{i_2}^{(1)} & \cdots & h_{i_k}^{(1)} \\ h_{i_1}^{(2)} & h_{i_2}^{(2)} & \cdots & h_{i_k}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{i_1}^{(k)} & h_{i_2}^{(k)} & \cdots & h_{i_k}^{(k)} \end{vmatrix};$$

并称

$$\omega = \sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_k<n} a_{i_1\cdots i_k}(X)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

为Ω（$\subset R^n$）上的k次微分形式，其中$a_{i_1\cdots i_k}(X)$都是Ω上的可微函数。

同样可以证明，若

$h: (u_1,u_2,\cdots,u_k)\longmapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，（$k\leqslant n$）是$C^1(D)$类映射，则有

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=\frac{\partial(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_k)}\cdot du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_k$$

特别当$k=n$时，有

$$dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\cdot du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_n$$

因此，积分的变量替换公式可以表示为

$$\int_M f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n=\int_{h^{-1}(M)}(f\circ h)(u)\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_n$$

这个公式比微积分中的重积分变量替换公式

$$\int\cdots\int_M f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\int\cdots\int_{h^{-1}(M)}(f\circ h)(u)\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right|du_1du_2\cdots du_n$$

要深刻而且方便得多，至少不必考虑Jacobian的符号而只要做微分形式的运算就可以了。

5.6 外微分

如果把Ω上的可微函数全体记为$\Lambda^0(\Omega)$，则我们可以

在$\Lambda^0(\Omega)$，$\Lambda^1(\Omega)$，$\Lambda^2(\Omega)$，$\Lambda^3(\Omega)$内引入一种运算d，并称之为外微分。

设

$$f=f(x,\ y,\ z)$$

$$\sigma=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$\tau=P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+R(x,y,z)dx\wedge dy$$

$$\omega=h(x,\ y,\ z)dx\wedge dy\wedge dz$$

分别为$\Lambda^0(\Omega)$，$\Lambda^1(\Omega)$，$\Lambda^2(\Omega)$，$\Lambda^3(\Omega)$的元素，我们定义：

0一形式f的外微分为

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

这与我们以前定义的微分相同，是一个1一形式；

1一形式σ的外微分为

$$d\sigma=(dP)\wedge dx+(dQ)\wedge dy+(dR)\wedge dz$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

这是一个2一形式；

2一形式τ的外微分为

$$d\tau=(dP)\wedge dy\wedge dz+(dQ)\wedge dz\wedge dx+(dR)\wedge dx\wedge dy$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

这是一个3—形式；

3—形式ω的外微分为

$$d\omega=(dh)\wedge dx\wedge dy\wedge dz=\cdots\cdots=0$$

由此可知，$\Lambda^k(\Omega)$，$(_{k=0,1,2,3})$的元素经过外微分后便成为$\Lambda^{k+1}(\Omega)$的元素。

5.7 Stokes公式

限于篇幅，我们这里不再独立地导出这三个公式，而只是利用微分形式与外微分的知识对出现在微积分中的这几个重要公式做一个统一的解释以揭露它们之间所遵循的普遍的规律。

一、Green公式

所谓Green 公式是

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma \qquad (1)$$

其中D是二维区域，l是它的边界即$l=\partial D$，方向正向（逆时针方向）。

设$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，这是一个1-形式。所以(1)式左端为

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{\partial D}\omega$$

因为xy看成是自然定向的，所以(1)右端按定义可改写为2-形式的积分：

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

设$\sigma=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$。这是一个2-形式，显然有$d\omega=\sigma$，所以公式(1)即为

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}d\omega \qquad (2)$$

这说明一个R^2的2-形式在区域D上的积分等于它的原函数在D的边界（取正向）上的积分。

二、Gauss-Остроградскний公式

所谓Gauss-Остроградскний公式是

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (3)$$

其中Ω是R^3的一个区域，Σ是它的边界，即$\Sigma=\partial\Omega$，方向正向（朝外）。

设$\omega=P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+R(x,y,z)dx\wedge dy$，这是$R^3$的一个2-形式。由于$yz$，$zx$，$xy$都是自然定向的，所以(3)式左端可以改写为

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\int_{\partial\Omega}\omega \qquad \text{（见5.3之五）}$$

而(3)式右端按定义可以改写成3-形式的积分

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

设$\sigma=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$，显然

$d\omega=\sigma$，所以公式（3）也可以写成（2）的形式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega \qquad (4)$$

三、Stokes公式

所谓Stokes公式是

$$\int_{l}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (5)$$

其中Σ是空间有向曲面，l 是它的边界，即 $l=\partial\Sigma$，Σ的方向与 l 的方向构成右手系（即位在Σ的正侧上观察，l 移动的方向为逆时针方向）。

设$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$

$$\sigma=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$

$$dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

显然$d\omega=\sigma$，故由5.3之五，（5）可以改写为微分形式的积分

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega \qquad (6)$$

从式（2）、（4）、（6）看出，Green公式，Gauss-Остроградский公式和Stokes公式都遵循一个普遍的规律（甚至包括Newton-Leibniz公式），即

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega \qquad (7)$$

这个公式也适用于更高维的情况，通常称为 Stokes 公式。由于这个公式，使以前学过的这许多积分公式统一成一个公式了。

习　　题

1. 证明Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数}\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$$

在〔0，1〕上不可积。

2. 设 $F=[a, b]$ 为 n 维闭区间，$f: F\longrightarrow R^1$ 为有界，证明 f 在F上可积的充分而必要的条件是对任何的 $\eta>0$，$f(x)$的振幅 $\omega(x)\geqslant\eta$ 的点所成之集的容积为零。

3. 证明Riemann函数

$$\zeta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当} x=\dfrac{p}{q}\ (q>0, p, q\text{为互质整数})\\ 0, & \text{当} x \text{为无理数}\end{cases}$$

在所有无理点为连续，在所有有理点不连续，但仍在〔0，1〕上可积。

4. 若函数 $f(x)$ 在〔a，b〕上可积，则存在折线函数列 $\varphi_n(x)_{(n=1,2,\dots)}$，使

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx$$

5. 若函数 $f(x)$在〔A、B〕可积，证明积分的"连续性"：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0,(A<a<b<B)$$

6.设 f 和g在〔a, b〕上可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，置$S=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b, f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$，则$S$有容积，且

$$V(s)=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$$

7. 若 S_1, S_2, …, S_k 为 $\mathbf{R}^n$ 内的有容积集，则$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$与$S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k$仍有容积。若 $S_1,\cdots,S_k$, …为无限多个有容积集，试问$\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$还是有容积的集吗?

8.如果$u_n(x)$ ($n=1,2,\ldots$) 在〔a, b〕上都是可积的，而且以它们为项的级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛，证明级数的和函数$S(x)$同样可积。

9. 设f是定义在〔a, b〕上的有界函数，对每一个$x\in[a, b]$, $f(x)>c$, 并设$F_1=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y<f(x)\}$; $F_2=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant f(x)\}$, 则

$$\int_a^b [f(x)-c]dx\leqslant V^-(F_1)\leqslant V^-(F_2)$$

$$\int_a^b [f(x)-c]dx\geqslant V^+(F_2)\geqslant V^+(F_1)$$

10. 证明4.1之例2

11. 如x是一有理数，则将它表作正分母的既约分数后，表分母为q_x，今在$S=[0,1;0,1]$上定义函数$f(x, y$

如下：

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & \text{当}x, y\text{为有理数且}q_x=q_y\text{时}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明累次积分

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x, y)dy\right)dx \text{ 与 } \int_0^1\left(\int_0^1 f(x, y)\,dx\right)dy$$

存在且等于零，但$\int_S fdV_2$不存在。

12. 设$S=\{(x_1, x_2);\ 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1, 2\}$，$g$是定义在$S$上的函数，其分量为$y_1=x_1$，$y_2=x_1^2+x_2$，计算$g(S)$的容积。

13. 证明在$S=\{(x_1, x_2);\ 1\leqslant x_i\leqslant 2,\ i=1, 2\}$上由

$$y_1=x_1^2-x_2^2,\qquad y_2=2x_1x_2$$

所确定的映射g是一对一的，并计算$V[g(S)]$。

14. 通过一个合适的替换，计算二重积分

$$\iint_\sigma\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)^2 d\sigma$$

其中σ是由$x=0$，$y=0$及$x+y=1$三曲线所围成的区域。

15. 通过适当的替换，计算$\int_F K(x_1, x_2)dV_2(X)$。

i) $K(x_1, x_2)=x_1-x_2^2$

F是以曲线$x_2=2$，$x_1=x_2^2-x_2$，$x_1=2x_2+x_2^2$为边界的平面区域。

ii) $K(x_1, x_2)=(x_1^2+x_2^2)^{-3}$

F是以曲线$x_1^2+x_2^2=2x_1$，$x_1^2+x_2^2=4x_1$，$x_1^2+x_2^2=2x_2$，$x^2+x_2^2-6x_2$为边界的平面区域

iii) $K(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，

F是第一象限中以$x_1^2-x_2^2=1$，$x_1^2-x_2^2=2$，$x_1x_2=1$，$x_1x_2=2$，为边界的区域。

16. 通过球坐标变换 $x_1=\rho\cos\varphi\sin\theta$，$x_2=\rho\sin\varphi\sin\theta$，$x_3=\rho\cos\theta$，计算积分

$$\int_F x_3 dV_3(x),$$

其中F是由不等式$0\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant x_3^2$，$0\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1$，$x_3\geqslant 0$所确定的区域。

17. 试求下列各ω的外微分

i) $\omega=x_1dx_2-x_2dx_1$

ii) $\omega=\dfrac{x_1dx_2-x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2}$

iii) $\omega=x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2$

iv) $\omega=\dfrac{x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2}{(x_1^2+x_1^2+x_3^2)^{3/2}}$

18. 设$\sigma\in\Lambda^r$，举例说明，当r是偶数时，$\sigma\wedge\sigma$可以不等于零。

19. 设$\omega=a_1(x_2,x_3)dx_2\wedge dx_3+a_2(x_1,x_3)dx_3\wedge dx_1+a_3(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2$，试计算$d\omega$。

20. 对于$\mathbb{R}^k$中的

$$\omega=\sum_i a_j dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_k\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}$$

$(a_i = a_i(x_1, \cdots, x_k))$，写出Stokes定理。

21. 对于 R^3 中的 $\omega = a_1(x_3)dx_1 + a_2(x_3)dx_2$ 写出Stokes定理。

附　录

Lebesgue积　分

前　言

Riemann积分理论，是数学分析的一个很重要组成部分，它有很大的理论价值与广泛的实际应用，但它又有不可否认的缺点。事实上，大家都知道，Riemann积分的定义，本质上是为连续函数而作的，所以它只能适用于性质比较好的那种函数，因此，对于性质比较奇特的函数，例如著名的Dirichlet函数，它就无能为力了，此其一；其二，它对于分析运算次序交换上，要求比较高，这就或多或少地束缚着我们进行分析运算的能力。因而有必要对Riemann积分进行改造。我们希望改造后的积分允许有更一般的被积函数，并且可以用较少的附加条件实现分析运算次序的交换。而Lebesgue积分恰恰能弥补Riemann积分在这方面的一些不足。

Lebesgue积分理论与Lebesgue测度理论往往是有联系的，因此一般的有关这方面的教科书，多从测度理论开始，篇幅未免过大。我们这里采用Young、Riesz、Stone等数学家所建立的用线性泛函开拓的方法来引入Lebesgue积分，其中避免了测度的一套理论，而仅仅利用零测度集的概念。

这里，我们不打算介绍多元Lebesgue积分的理论。因为它的许多基本概念和基本定理都是一元Lebesgue积分平行推广的结果。当然，在多元Lebesgue积分理论中，必然会增加一些论证上的难度和展现许多新的内容，例如重积分化为累次积分的问题等等，但这些都是容易解决的。

§1　零测度集

定义1.1　实数子集 A 称为**零测度集**，如果任给 $\varepsilon>0$，存在A的一个可数开区间复盖，而这些区间长度总和可小于 ε。

定理1.1　设 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots\}$ 为可数个实数的子集族，其中每一个F_i均为零测度集，则它们的并$S=\bigcup\limits_i F_i$亦为零测度集。

证明　任给 $\varepsilon>0$，存在F_i的可数开区间复盖 $\{G_{i,k}\}_{(k=1,2,\cdots)}$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}|G_{i,k}|<\varepsilon/2^i$$

其中$|G_{i,k}|$代表开区间$G_{i,k}$的长度，显然，

$$\{G_{i,k}\}_{(i,k=1,2,\cdots)}$$

是S的一个可数开区间覆盖，它们长度之总和

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|G_{i,k}|<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$$

例　只有一个点或有限点构成的集，是零测度集，所以R^1的任何一个可数子集，是零测度集。特别，有理数全体Q是零测度集。

§2 简单函数及其积分

定义2.1 设$[a,b]$是R^1的一个紧区间。谓$S:[a,b]\to R^1$是一个简单函数（或阶梯函数），当且仅当存在$[a,b]$的一个分划

$$P=\{a=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n=b\}$$

使S在P的每一个子区间(x_{k-1}, x_k)上取常数值c_k。

设$S(x)$是$[a,b]$上的简单函数，它在$[a,b]$上的积分定义为

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{k=1}^n c_k(x_k-x_{k-1})$$

显然，这个值即为$S(x)$在$[a,b]$上的Riemann积分值。

定义2.2 设I为一般区间（有界、无界、开、闭或半开），如果函数$S(x)$限制在某个紧区间$[a,b]$上，是$[a,b]$上的一个简单函数，而在$I\setminus[a,b]$上取值为零，则称$S(x)$是I上的一个简单函数。

记I上的简单函数全体为类$C_0(I)$。对$S(x)\in C_0(I)$的积分，定义为

$$\int_I S(x)dx=\int_a^b S(x)dx$$

容易看出，若f，g都是一般区间I上的简单函数，则

$$|f|, \max(f, g), \min(f, g), f\pm g$$

等都是I上的简单函数。

简单函数的积分，具有Riemann积分的一般性质。

§3 简单函数的单调序列

以后我们经常引用“性质P在集S上几乎处处成立”这一术语。此话的涵义是：在集S上，除了可能在一个零测度集之外，性质P在S上都是成立的。并简单地记为P（$a.e.$）或P（$p.p.$），其中$a.e.$即英语almost everywhere的缩写，而$p.p.$乃是法语Presque Partout的缩写。例如，对Dirichiet函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

我们可以写为$D(x)=0$（$p.p.$）。

定义3.1 设$\{f_n\}$是定义在集S上的某个实值函数列，如果对每个$x\in S$，恒有

$$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$$

则称$\{f_n\}$是S上的**单调增加序列**；当相反的不等式恒成立时，则称$\{f_n\}$是S上的**单调减少序列**。

对于简单函数的单调序列，有下面两个基本定理：

定理3.1（简单函数列的Levi单调收敛定理） 设$\{S_n(x)\}$是I上的简单函数增加序列，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_I S_n(x)\,dx$存在且有限，则$S_n(x)$在$I$上几乎处处收敛到有穷极限。

证明 不失一般性，可以假定$S_n(x)$均为非负，因为否则我们可以用函数序列$\{S_n(x)-S_1(x)\}$来代替$\{S_n(x)\}$。

由于$\{\int_I S_n(x)dx\}$，（$n\geqslant 1$）收敛，故存在实数

A，对一切自然数n，有

$$\int_I S_n < A$$

设E_0是使$\{S_n(x)\}$不收敛点的全体，我们证明E_0是一个零测度集，为此，我们考察它是否存在一个总长度小于ε的开区间覆盖。记E_ε是对充分大的n,使$S_n(x) > A/\varepsilon$的那些点组成的集合。显然，$E_0 \subset E_\varepsilon$；对任意的$n$，使$S_n(x) > A/\varepsilon$成立的点的全体乃是有穷个开区间构成的系统$\Sigma_{n,\varepsilon}$（这是因为$S_n(x)$是简单函数的缘故），而$\Sigma_{n,\varepsilon}$的构成区间长度总和与$A/\varepsilon$的乘积不会超过$\int_I S_n (< A)$，故$\Sigma_{n,\varepsilon}$的构成区间长度之和应小于ε。最后，容易证明$E_\varepsilon = \bigcup_n E_{n,\varepsilon}$，所以$E_\varepsilon$便是由可数个区间之并构成。因为$E_{n,\varepsilon} \subset E_{n+1,\varepsilon}$，而每一个$E_{n,\varepsilon}$，其构成区间长度总和小于ε，因而可以证明$E_\varepsilon$的构成区间长度总和小于ε。由ε任意性，知$E_0$能被总长度小于ε的可数个开区间系统所覆盖。按定义，E_0是零测度集。

定理3.2 设$\{S_n\}$是区间I（如无特别声明，以后出现的区间I，均指一般区间）上的非负简单函数减少序列，并且在I上几乎处处收敛到零，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_I S_n = 0$$

证明 我们把积分分成两部分，使

$$\int_I S_n = \int_A S_n + \int_B S_n$$

其中希望A、B均为区间的有限并，而集A选得使被积函数在其上取值很小（当n充分大时），集B则要求选得使其长

度之和为很小。

据定义，存在有界闭区间〔a，b〕，使$S_1(x)$在它的外面等于零，因为

$$0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_1(x) \qquad (x \in I)$$

所以对每一个$S_n(x)$，在〔a，b〕之外亦等于零，从而对给定的$S_n(x)$，存在〔a，b〕的分划，使在每一个分划的子区间内函数取常数值。令D_n为此分划的分点所构成的集，并令

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

D是一个可数集，所以是一个零测度集。

令E表示〔a，b〕中使$\{S_n(x)\}$不收敛的点集。由假定，E是零测度集。故$F = D \cup E$亦为零测度集。因之，任给$\varepsilon > 0$，总存在F的一个开区间覆盖$\{G_i\}$，而使$\sum_{i=1} |G_i| < \varepsilon$。

现设$x \in$〔a，b〕$\backslash F$，则$x \notin E$及$x \notin D$。而$x \notin E$意谓当$n \to \infty$时，$S_n(x) \to 0$，从而存在正整数$N = N(x)$，使$S_N(x) < \varepsilon$；同样，$x \notin D$，意谓x必落在$S_N(x)$的某个恒值区间的内部，从而存在包含x的开区间$B(x)$，使对一切$t \in B(x)$，有$S_N(t) < \varepsilon$。因为$\{S_n\}$为减少序列，所以亦有

$$S_n(t) < \varepsilon \quad (n \geqslant N(x)\text{且}t \in B(x)) \quad (1)$$

取遍$x \in$〔a，b〕$\backslash F$，得区间$\{B(x)\}$的族。加上原先的开区间族$\{G_i\}$，便构成〔a，b〕的一个开覆盖，由Heine-Borel定理，存在它的有限子族覆盖F。设

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_{m_i}) \cup (\bigcup_{r=1}^{q} G_{n_r})$$

令$N_0 = \max(N(x_{m_1}), N(x_{m_2}), \cdots (x_{m_p}))$，由

（1）可以看出，对一切$n \geqslant N_0$及一切 $t \in \bigcup_{i=1}^{p} B(x_{m_i})$，有

$$S_n(t) < \varepsilon$$

现定义

$$A = \bigcup_{r=1}^{q} G_{n_r}, \quad B = [a, b] \setminus A$$

则B是有限个不相交区间之并，并且有

$$\int_I S_n = \int_a^b S_n = \int_A S_n + \int_B S_n$$

首先估计A上的积分。令M表示S_1在$[a, b]$上的最大值，故有

$$S_n(x) \leqslant S_1(x) \leqslant M$$

而A中各区间长度之和小于ε，故得

$$\int_A S_n \leqslant M\varepsilon \qquad (n \geqslant 1) \qquad (2)$$

其次，估计B上的积分。因为$B \subset \bigcup_{i=1}^{q} B(x_{m_i})$，故当$x \in B$及$n \geqslant N_0$时，有$S_n(x) < \varepsilon$，又$B$的各成员长度之和不超过$b-a$，故有

$$\int_B S_n \leqslant (b-a)\varepsilon, \quad (n \geqslant n_0) \qquad (3)$$

合并（2）、（3），当$n \geqslant N_0$时，便有

$$\int_I S_n \leqslant (M+b-a)\cdot\varepsilon \qquad \text{证毕}$$

推论 若

i） $\{t_n\}$是I上几乎处处收敛到某个函数f的简单函数增加序列；

ii）$\{\int_I t_n\}$收敛，则对每一个在I上几乎处处成立$t(x)\leqslant f(x)$的简单函数$t(x)$，恒有

$$\int_I t \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_I t_n \qquad (4)$$

证明 在I上定义一个新的非负简单函数的减少序列$\{S_n\}$如下：

$$S_n(x)=\begin{cases} t(x)-t_n(x); & \text{若} t(x)\geqslant t_n(x) \\ 0, & \text{若} t(x)\leqslant t_n(x) \end{cases}$$

由于

$$S_n(x)=\max\{t(x)-t_n(x),\ 0\}$$

所以有

$$S_n(x)\to\max\{t(x)-f(x),\ 0\}=0\,(p.\,p.)$$

因之，在I上$S_n(x)$几乎处处收敛到$g(x)=0$（减少地）。由定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I S_n=0$$

但对任何$x\in I$，有

$$S_n(x)\geqslant t(x)-t_n(x)$$

故

$$\int_I S_n \geqslant \int_I t-\int_I t_n$$

令$n\to+\infty$，得

$$\int_I f \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_I t_n$$

§4 C_1类函数及其积分

这一节我们要从已经定义了积分的$C_0(I)$类函数出发，来定义更大的可积函数类$C_1(I)$，它们的元素被定义为$C_0(I)$类的增加序列的极限。

定义4.1 定义在区间I上的实值函数f，称为是属于$C_1(I)$类的，如果存在一个简单函数的增加序列$\{S_n\}$，使

i) 在I上，$\{S_n\}$几乎处处收敛到f；

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I S_n$存在且有限。

此时，又说$\{S_n(x)\}$生成f。

f在I上的积分，定义为

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I S_n \qquad (1)$$

细心的读者一定会对上述定义的合理性产生疑问，因为只有回答了f的积分与生成它的序列无关时，上述定义才是一意的。但事实上，我们有

定理4.1 设$\{s_n\}$、$\{t_n\}$为生成f的任意两个简单函数增加序列，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I s_n = \lim_{n\to\infty}\int_I t_n$$

证明 由假设，在I上几乎处处有

$S_n\leqslant f$，$t_n\leqslant f$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=f(x)$，

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x)=f(x)$。故由定理3.2之推论，有

$$\int_I s_n(x)\,dx\leqslant \lim_{m\to\infty}\int_I t_m(x)\,dx$$

及

$$\int_I t_m(x)\,dx\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_I s_n(x)\,dx$$

对上述两个不等式取极限，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I s_n(x)\,dx\leqslant \lim_{m\to\infty}\int_I t_m(x)\,dx$$

及
$$\lim_{m\to\infty}\int_I t_m(x)\,dx\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_I S_n(x)\,dx$$

此即

$$\lim_{n\to\infty}\int_I s_n(x)\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_I t_m(x)\,dx$$

定理4.1告诉我们，对于 $C_1(I)$ 中的函数 f 之积分，与生成它的简单函数列无关，因此，定义4.1是合理的。从定义4.1还可以看出，每一个 $C_0(I)$ 类的函数，同时也是 $C_1(I)$ 类函数，故有 $C_0(I)\subseteq C_1(I)$。不仅如此，对简单函数而言，按 $C_1(I)$ 类函数定义的积分与按 § 2 中定义的积分，其值相同。

定理4.2 设 $f\in G_1(I)$，$g\in C_1(I)$，则

i） $f+g\in C_1(I)$ 且 $\int_I (f+g)=\int_I f+\int_I g$，

ii） 对每一非负常数 C，有 $Cf\in C_1(I)$，且

$$\int_I Cf=C\int_I f$$

iii） 若 $f\leqslant g\,(p.p.)$，则 $\int_I f\leqslant\int_I g$。

结论i），ii）是容易从简单函数的性质及$C_1(I)$类函数积分的定义推得的。但必须注意，ii）中要求常数C为非负却是非常重要的。因为实际上存在着$f\in C_1(I)$但$-f\notin C_1(I)$的例子。我们准备在证明iii）之后，再给出这方面的例子。

iii）的证明：设$\{s_n\}$生成f，$\{t_n\}$生成g，因而

$$s_m(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)=\lim_{n\to\infty}t_n(x)$$

由定理3.2之推论，得

$$\int_I s_m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_I t_n=\int_I g$$

令$m\to\infty$，得

$$\lim_{m\to\infty}\int_I s_m=\int_I f\leqslant\int_I g$$ 证毕。

例 下面是$f\in C_1(I)$，但$-f\notin C_1(I)$的一个反例。

令$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$为$I=[0,1]$内的有理数全体，并令

$$I_n=\left[r_n-\frac{1}{4^n},\ r_n+\frac{1}{4^n}\right]\cap I$$

及

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若x\in\bigcup_n I_n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

并置

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup_{k=1}^{n}I_k\\ 0, & 其它\end{cases}$$

容易证明$\{S_n(x)\}$是一个简单函数的增加序列，并且生

成f，从而$f\in C_1(I)$，并且通过简单计算，知

$$\int_I f\leqslant 2/3 \qquad (A)$$

但如果在I上，简单函数$S(x)$满足$S(x)\leqslant -f(x)$，由$\{r_1, r_2, \cdots\}$在$[0, 1]$之稠密性，可以证明在I上必几乎处处有$S(x)\leqslant -1$，因之，有

$$\int_I S(x)\leqslant -1 \qquad (B)$$

现若假定$-f\in C_1(I)$，则由定理4.2之i)，有

$$0=\int_I [f+(-f)]=\int_I f+\int_I(-f) \qquad (C)$$

另一方面，设$\{t_n(x)\}$生成$-f$，故由(B)，有

$$\int_I(-f)=\lim_{n\to\infty}\int_I t_n\leqslant -1 \qquad (D)$$

联合(C)与(D)得

$$\int_I f\geqslant 1$$

这与(A)矛盾！因此$-f$不可能属于$C_1(I)$。

定理4.3 若$f\in C_1(I)$，$g\in C_1(I)$，则

$$\max(f, g)\in C_1(I)$$
$$\min(f, g)\in C_1(I)$$

证明 设$\{s_n\}$和$\{t_n\}$分别生成f和g，并令

$$u_n=\max(s_n, t_n),\quad v_n=\min(s_n, t_n)$$

欲证$\{u_n\}$生成$\max(f, g)$，$\{v_n\}$生成$\min(f,g)$。

显然，$u_n\in C_0(I)$，$v_n\in C_0(I)$，并且$\{u_n\}$与$\{v_n\}$都为增加序列，分别在I上几乎处处收敛到$\max(f, g)$与$\min(f, g)$。

另一方面，$v_n\leqslant f$ (p.p.)，故$\int_I v_n\leqslant\int_I f$，因之递

增数列$\left\{\int_I v_n\right\}$有上界，从而收敛。由定义，$\min(f, g)\in C_1(I)$，

又由

$$\max(\alpha(x), \beta(x)) + \min(\alpha(x), \beta(x)) = \alpha(x) + \beta(x)$$

得

$u_n + v_n = s_n + t_n$，即 $u_n = s_n + t_n - v_n$ 因而序列$\left\{\int_I u_n\right\}$也收敛，所以$\max(f,g)\in C_1(I)$。

下面的一个定理指出，当I是紧区间时，I上的Riemann可积函数也一定是$C_1(I)$类函数，亦即I上的Riemann可积函数类包含在$C_1(I)$之中，而前面所引的例子告诉我们，这种包含关系还是严格的包含关系。

定理4.4 设I为有界闭区间，若f在I上Riemann可积，则$f\in C_1(I)$，并且f作为$C_1(I)$类函数的积分，其值与f在I上的Riemann积分值相同。

证明 在证明这个定理之前，我们要引用Riemann可积函数的一个性质。此即：定义在有界闭区间$[a,b]$上的有界函数$f(x)$为R－可积分的充要条件是$f(x)$在$[a, b]$上几乎处处连续。这个性质的证明，读者可从任何的一本“实变函数论”教科书中找到。

令$P_n=\{a=x_0, x_1, \cdots, x_{2^n}=b\}$为$[a, b]$的一个$2^n$等分的分划。而$P_{n+1}$的构成区间由二分$P_n$的每一个构成区间而得到，从而$P_{n+1}$是$P_n$的一个加密并且有$\|P_n\| = 2^{-n}\cdot(b-a)\to 0$。

设

$$m_k = \inf\{f(x),\ x \in (x_{k-1}, x_k]\}$$
$$(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$$

对每一个分划P_n，对应如下的一个简单函数：

$$S_n(x) = \begin{cases} m_k, & x \in (x_{k-1}, x_k] \\ f(a), & x = a \end{cases}$$

显然，$\{S_n(x)\}$是一个单调增加序列，并且$S_n(x) \leqslant f(x)$。我们首先证明，在每一个使f连续的点x上，都有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

设$f(x)$在x连续，则对任给的$\varepsilon > 0$，存在数$\delta > 0$，当$x - \delta < y < x + \delta$时，可使不等式

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$$

成立，令

$$m(\delta) = \inf\{f(y):\ x - \delta \leqslant y \leqslant x + \delta\}$$

则$f(x) - \varepsilon \leqslant m(\delta)$，因之，$f(x) \leqslant m(\delta) + \varepsilon$。另一方面，存在某个分划$P_N$，它的一个构成区间$(x_{k-1}, x_k]$包含$x$，并且位于$(x - \delta, x + \delta)$之中，从而有

$$S_N(x) = m_k \leqslant f(x) \leqslant m(\delta) + \varepsilon \leqslant m_k + \varepsilon$$
$$= S_N(x) + \varepsilon$$

但对一切$n \geqslant N$，有

$$S_N(x) \leqslant S_n(x) \leqslant f(x)$$

因而，当$n \geqslant N$时，有

$$S_n(x) \leqslant f(x) \leqslant S_n(x) + \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \quad (p.p.)$

其次，我们证明，$\{S_n(x)\}$生成f。这是因为增加序列$\left\{\int_a^b S_n(x)\,dx\right\}$以$M(b-a)$为其上界，其中

$M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx$ 存在且有限，故f系由$\{S_n(x)\}$生成，因而$f\in C_1(I)$

最后，因为

$$\int_a^b S_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{2^n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$=L(P_n,f),$$

而 $$\lim_{\|P_n\|\to 0} L(P_n,f)=\int_a^b f$$

所以 $$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n=(R)\int_a^b f$$

§5 一般区间I上的Lebesgue积分及其性质

前面我们已经看到，在$C_1(I)$内，减法运算不封闭的。因此我们必须进一步扩大函数类，使减法在新的一类函数中成为封闭。

定义5.1 记I上所有形如$f=u-v$的函数之全体为$L(I)$，其中$u\in C_1(I)$，$v\in C_1(I)$，$L(I)$内的每一个函数称为在I上是Lebesgue可积的，它在I上的积分定义为

$$\int_I f=\int_I u-\int_I v$$

显然$L(I)$内的每一个函数，其表示$f=u-v$并不是唯一的，为使上述积分定义是一意的，我们还必须证明f的积分与u、v的选取无关。

定理5.1 设u，v，u_1，v_1均为$C_1(I)$类函数，并且

$$u-v=u_1-v_1$$

则有

$$\int_I u-\int_I v=\int_I u_1-\int_I v_1 \qquad (1)$$

证明 函数$u+v_1$和u_1+v均为$C_1(I)$类函数，并且

$$u+v_1=u_1+v$$

故

$$\int_I (u+v_1)=\int_I (u_1+v)$$

由定理4.1之i)，又有

$$\int_I u+\int_I v_1=\int_I u_1+\int_I v$$

移项后，即得(1)。

Lebesgue积分有如下常用的性质：

性质1° 设$f\in L(I)$、$g\in L(I)$，则对任何实数a，b，有

$$\int_I (af+bg)=a\int_I f+b\int_I g \qquad (2)$$

这是容易证明的。

性质2° 如果在I上，$f(x)=0$ ($p.p.$)，则$f\in L(I)$，并且

$$\int_I f=0$$

实际上，可取$\{S_n(x)\equiv 0\}_{n=1,2,\cdots}$，它生成$f$，所以$f\in C_1(I)$，更有$f\in L(I)$，并且

$$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_I S_n=0$$

性质3° 设$f\in L(I)$，并且在I上$f=g$ ($p.p.$)，则

$g \in L(I)$，并且

$$\int_I g = \int_I f$$

证明 由性质2°，知$(f-g) \in L(I)$，且$\int_I (f-g) = 0$，从而$g = f-(f-g) \in L(I)$，且

$$\int_I g = \int_I f - \int_I (f-g) = \int_I f$$

性质3°说明，改变Lebesgue可积函数在某个零测度集上的值，并不影响其积分值。

例 Dirichlet函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

几乎处处等于零，故$D(x) \in L(I)$，并且$\int_I D(x) = 0$。而众所周知，$D(x)$在任何区间上都不R-可积。

性质4° 设$f \in L(I)$。并假定$f(x) \geqslant 0 (p.p.)$，则

$$\int_I f \geqslant 0$$

证明 设$f = u - v$，其中$u \in C_1(I)$，$v \in C_1(I)$，于是$u \geqslant v (p.p.)$由定理4.2之iii)，有$\int_I u \geqslant \int_I v$，因而$\int_I f \geqslant 0$。

性质5° 设$f \in L(I)$，$g \in L(I)$，并且在I上$f(x) \geqslant g(x) (p.p.)$，则$\int_I f \geqslant \int_I g$，特别当$f = g (p.p.)$时，

便有$\int_I f=\int_I g$。

这是性质4°的直接推论。

性质6° 若f、g均为$L(I)$类函数，则$f^+=\max(f,0)$，$f^-=\max(-f,0)$，$|f|$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$亦为$L(I)$类函数，并且有

$$\left|\int_I f\right|\leqslant\int_I |f| \qquad (8)$$

证 设$f=u-v$，其中$u\in C_1(I)$，$v\in C_1(I)$，从而

$$f^+=\max(u-v,\ 0)=\max(u,v)-v$$

由定理4.3知 $\max(u,v)\in C_1(I)$，故$f^+\in L(I)$。

因为$f^-=f^+-f$，故亦有$f^-\in L(I)$，从而$|f|=f^++f^-\in L(I)$。由于

$$\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$\min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

故由刚才所证，知$\max(f,g)$，$\min(f,g)$亦属于$L(I)$。

最后，对一切$x\in I$，有

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$$

故

$$-\int_I|f|\leqslant\int_I f\leqslant\int_I|f|$$

此即(8)。

性质7° 设区间$I=I_1\cup I_2$，其中I_1与I_2为两个无公共内点的区间，如果$f\in L(I)$，则$f\in L(I_1)$，$f\in L(I_2)$，并且有

$$\int_I f = \int_I f_1 + \int_I f_2 \qquad (4)$$

这个性质留给读者证明。

最后我们证明$L(I)$类函数的一个逼近性质，它反映了此类函数的一种结构。在下一节里，我们将利用这个性质来证明单调收敛定理。

性质8° 设$f \in L(I)$，ε为事先给出的任意一个正数，则

i） 存在$C_1(I)$类函数u和v，其中v在I上几乎处处非负，并且$\int_I v < \varepsilon$，而使$f = u - v$。

ii） 存在$s \in C_0(I)$和$g \in L(I)$，其中$\int_I |g| < \varepsilon$而使$f = s + g$。

证明

i） 记$f = u_1 - v_1$，其中u_1，v_1均为$C_1(I)$类函数，并假定$\{t_n\}$生成v_1，因之，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_I t_n = \int_I v_1$，故可选$N$，使

$$\int_I (v_1 - t_N) < \varepsilon$$

令$v = v_1 - t_N$，$u = u_1 - t_N$，显然，u,v均为$C_1(I)$类函数，并且有

$$v \geqslant 0\ (p.p.)；\int_I v < \varepsilon；f = u_1 - v_1 = u - v$$

ii） 利用i），假定已选好$C_1(I)$类函数u，v，满足：

$$v \geqslant 0\ (p.p.)；0 < \int_I v < \varepsilon/2；f = u - v$$

又假定$\{s_n\}$生成u。故存在简单函数$S_m(x)$，使

$0 \leqslant \int_{I}(u-s_m) \leqslant \varepsilon/2$，于是

$$f=u-v=s_m+(u-s_m)-v=s+g$$

其中$s=s_m$是简单函数，$g=(u-s_m)-v\in L(I)$且

$$\int_{I}|g| \leqslant \int_{I}(u-s_m)+\int_{I}v<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \text{ 证毕。}$$

定理的第i）条说明，每一个L－可积函数f可以表示为一个$C_1(I)$类函数与一个积分值任意小的$C_1(I)$类非负函数之差；定理的第ii）条则说，每一个L可积函数可以表示为一个$C_0(I)$类函数与一个积分值任意小的$L(I)$类函数之和。

§6 Levi单调收敛定理

Levi收敛定理是L－积分中的一个基本定理。其中关于简单函数列的Levi单调收敛定理我们已作为定理3.1阐述过。这一节着重讲述$C_1(I)$类函数列的单调收敛定理与$L(I)$类函数列的单调收敛定理。

定理6.1 （$C_1(I)$类函数列的Levi单调收敛定理）

设$\{f_n\}$为I上的$C_1(I)$类函数列，且

i） 在I上几乎处处成立$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$；

ii） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{I}f_n$存在且有限，

则$\{f_n\}$在I上几乎处处收敛到某个$C_1(I)$类的函数f，并且

$$\int_{I}f=\lim_{n\to+\infty}\int_{I}f_n$$

证明 对每一个k，设$\{s_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$生成f_k，其中$\{s_n^{(k)}(x)\}$

按定义是简单函数的增加序列。现在按如下方式定义一个I上的简单函数增加序列：

$$t_n(x)=\max\{s_n^{(1)}(x),\ s_n^{(2)}(x),\ \cdots s_n^{(n)}(x)\}$$

显然，

$$t_n(x)\leqslant f_n(x)\quad(p.p.)\qquad(1)$$

从而有

$$\int_I t_n(x)\leqslant\int_I f_n(x)\qquad(2)$$

由条件ii），知增加序列$\{\int_I t_n\}$有上界，所以$\{\int_I t_n\}$收敛。由定理3.1，$\{t_n\}$在I上几乎处处收敛到某个$f\in C_1(I)$，并且$\int_I f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_I t_n$。剩下只须证明$\{f_n\}$也几乎处处收敛到$f$，并且$\int_I f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n$

显然，对一切$k\leqslant n$，及一切$x\in I$，有$s_n^{(k)}(x)\leqslant t_n(x)$。令$n\to\infty$，得

$$f_k(x)\leqslant f(x)\quad(p.p.)\qquad(3)$$

因而增加函数列$\{f_k(x)\}$在I上几乎处处收敛到某个极限函数g，且满足

$$\lim_{n\to\infty}f_k(x)=g(x)\leqslant f(x)\ (p.p.)\qquad(4)$$

但由（1），令$n\to\infty$，又有

$$f(x)\leqslant g(x)\quad(p.p.)\qquad(5)$$

故由（4）、（5）、得

$$\lim_{\to\infty}f_k(x)=g(x)=f(x)\quad(p.p).$$

最后，在（2）中，令$n\to\infty$，便得

$$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_I t_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \qquad (6)$$

另一方面，由（3），有$\int_I f_k(x)\leqslant\int_I f$。令$k\to+\infty$，又得

$$\lim_{k\to\infty}\int_I f_k\leqslant\int_I f \qquad (7)$$

合并（6），（7）便得

$$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n$$

定理6.2 （Lebesgue可积函数列的Levi单调收敛定理） 设$\{f_n\}$为$L(I)$的函数列，且

i） 在I上几乎处处成立$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$；

ii） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n$存在且有限，

则在I上$\{f_n\}$几乎处处收敛到某个函数$f\in L(I)$，并且

$$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n$$

显然把条件i）换成$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots$（$p.p.$），仍有相同结论。我们不先直接证明定理6.2，而是先证明与之等价的所谓非负Lebesgue可积函数项级数的Levi定理，然后再把定理6.2作为后者的推论。

定理6.3（非负Lebesgue可积函数项级数的Levi定理） 设$\{g_n\}$为$L(I)$的函数列，且

i） 对每一个n，$g_n(x)$在I上几乎处处非负，即$g_n(x)\geqslant 0$（$p.p.$）；

ii） 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_I g_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在$I$上几乎处处收敛

到某个函数$g\in L(I)$，并且有

$$\int_I g=\int_I\sum_{n=1}^{\infty}g_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n \qquad (8)$$

证明 为了应用定理6.1，必须把g_n表示为§5中Lebesgue积分性质7°的形式。设ε为事先给定的任意正数，则对每一个g_n，都相应地存在着$C_1(I)$类的函数u_n与v_n，其中$v_n\geqslant 0$（$p.p.$）且$\int_I v_n<\varepsilon$，而使$g_n=u_n-v_n$，

取$\varepsilon=(\frac{1}{2})^n{}_{(n=1,2,\cdots)}$，便得满足上述要求的$C_1(I)$类的函数列$\{u_n\}$和$\{v_n\}$，于是：

$$u_n=g_n+v_n\geqslant 0 \quad (p.p.), \quad \int_I v_n<(1/2)^n$$

由此可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I v_n$收敛，而

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

为I上的几乎处处增加函数列。又

$$\int_I U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_I u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_I g_k(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_I v_k(x)$$

由$\sum_{k=1}^{\infty}\int_I g_k(x)$及$\sum_{k=1}^{\infty}\int_I v_k(x)$的收敛性，知$\{\int_I U_n(x)\}$收敛。因之由定理6.1，$\{U_n(x)\}$在$I$上几乎处处收敛到函数$U\in C_1(I)$，并且

$$\int_I U(x)=\lim_{n\to\infty}\int_I U_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I u_n(x)$$

同样，部分和序列$V_n(x)=\sum_{k=1}^{n}v_k(x)$在$I$上几乎处处收敛到$V\in C_1(I)$，并且

$$\int_I V(x)=\lim_{n\to\infty}\int_I V_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_I v_k(x)$$

因而$G=U-V\in L(I)$，并且序列$\{\sum_{k=1}^{n}g_k\}=\{U_n-V_n\}$在$I$上几乎处处收敛到$G=U-V$，且

$$\int_I G=\int_I U-\int_I V=\sum_{k=1}^{\infty}\int_I(u_n-v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n$$

现在回到定理6.2的证明。

在定理假设之下，令$g_1=f_1$，$g_n=f_n-f_{n-1}(n>1)$，则g_n在I上几乎处处非负，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_I g_k(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_I g_k(x)=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n$$

上式右端极限存在，所以$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$在$I$上几乎处处收敛于某个$f\in L(I)$，并使

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=\int_I f$$

例 令

$$f(x)=\begin{cases} x^p, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

若$p\geqslant 0$，则f在〔0，1〕上为Riemann常义可积，故亦Lebesgue可积，并且

$$\int_I f=\int_0^1 f=\frac{1}{1+p}$$

若$-1<p<0$，则f在〔0，1〕上无界，因而不R－常义可积。今定义函数列

$$f_n=\begin{cases} x^p, & \text{当} x\geqslant \frac{1}{n}\text{时} \\ 0, & \text{当} 0\leqslant x<\frac{1}{n}\text{时} \end{cases}$$

显然，$\{f_n\}$是增加序列，并且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，而每一个$f_n$在〔0，1〕上$R$－可积，因而$L$－可积，并且

$$\int_I f_n=\int_{1/n}^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}\left(1-\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

所以此时序列$\{\int_I f_n\}$是收敛的。由Levi定理，得

$$\int_{[0,1]} f=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=\frac{1}{1+p}$$

综上所述，当$p>-1$时，$f\in L$〔0，1〕，且

$$\int_I f=\frac{1}{1+p}$$

§7 Lebesgue控制收敛定理与Fatou定理

Lebesgue控制收敛定理虽然可以看成是Levi定理的一

个推论，但它却是Lebesgue积分理论的一个至为重要而基础的定理。这个定理指出，对于一个几乎处处收敛的可积函数列，如果被某个可积函数所"控制"，那么极限函数不仅属于$L(I)$，而且它在I上的积分可以通过求函数积分序列的极限而得到。

定理7.1 （Lebesgue控制收敛定理） 设$\{f_n\}$在区间I上的Lebesgue可积函数列，并且满足

1° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f \quad (p.p.)$；

2° 存在非负函数$g\in L(I)$，使对一切$n\geqslant 1$，在I上几乎处处有

$$|f_n(x)|\leq g(x)$$

则$f\in L(I)$，并且

$$\int_I f=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \tag{1}$$

证明 由条件1°，故在I上几乎处处成立（见第二章4.2节之4°）：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{f_k(x)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{f_k(x)\}$$

令 $G_n(x)=\sup\limits_{k\geq n}\{f_k(x)\}$，$H_n(x)=\inf\limits_{k\geq n}\{f_k(x)\}$，则$\{G_n(x)\}$在$I$上为减少，而$\{H_n(x)\}$在$I$上为增加，并且都几乎处处收敛到$f(x)$。此外，按定义，显然有

$$H_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant G_n(x) \qquad (p.p.)$$

因此，若能证明H_n与G_n都属于$L(I)$，定理亦就随之证明。

固定n，考察函数列

$$G_{k,n}(x)=\max\{f_n(x),f_{n+1}(x),\cdots,f_k(x)\}_{(k>n)}$$

这是关于k的增加函数列。由§5积分性质6°，知对每一个k，$G_{k,n}(x)\in L(I)$。又由定理假设2°，有

$$|G_{k,n}(x)|\leqslant g(x) \qquad (P.P.)$$

故 $$\left|\int_I G_{k,n}(x)\right|\leqslant\int_I |G_{k,n}(x)|\leqslant\int_I g \qquad (2)$$

因而增加序列$\left\{\int_I G_{k,n}(x)\right\}_k$有上界，从而由Levi定理，序列$\{G_{k,n}(x)\}_k$在$I$上几乎处处收敛于$L(I)$的某个极限函数。但这极限函数，不是别的，正是

$$\operatorname*{Sup}_{k\geq n}\{f_n(x),f_{n+1}(x),\cdots\}=G_n(x)$$

所以$G_n(x)\in L(I)$，并且

$$\int_I G_n(x)=\lim_{k\to\infty}\int_I G_{k,n}(x)$$

由（2），显然有

$$-\int_I g\leq\int_I G_n(x) \qquad (3)$$

从而减少序列$\int_I G_n(x)$有下界。再次应用Levi定理，知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x) \qquad (p.p.)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_I G_n=\int_I f \qquad (4)$$

同理可证

$$H_n(x)\in L(I) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\int_I H_n=\int_I f \qquad (5)$$

从而由（4）、（5）及不等式

$$\int_I H_n\leqslant\int_I f_n\leqslant\int_I G_n$$

便得

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n$$

例：设$f\in L(-\infty, +\infty)$考察f的Fourier变换

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\,dt$$

我们证明$\hat{f}$是x的连续函数。

为此考察

$$\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}(e^{iht}-1)f(t)\,dt$$

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iht}-1|\cdot|f(t)|\,dt$$

在上述右端积分中，被积函数被可积函数$2|f(t)|$所控制。故由Lebesgue控制收敛定理，有

$$\lim_{h\to 0}|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leqslant \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iht}-1||f(t)|\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0}|e^{iht}-1||f(t)|\,dt = 0$$

因而$\hat{f}$是x的连续函数。

定理7.2 设$\{f_n\}$为$L(I)$内的函数列，并且在I上几乎处处收敛于某个极限函数f，此外假设存在非负数函$g\in L(I)$，使

$$|f(x)| \leqslant g(x) \qquad (p.p.)$$

则$f\in L(I)$。

证明 在I上定义新的函数列

$$g_n = \begin{cases} g, & 若 f_n \geqslant g \\ f_n, & 若 -g < f_n < g \\ -g, & 若 f_n \leqslant -g \end{cases}$$

显然，$g_n \in L(I)$，并且

$$|g_n(x)| \leqslant g(x)$$

容易证明

$$g_n \longrightarrow f \qquad (p.p.)$$

因而由Lebesgue控制收敛定理，得$f \in L(I)$。

定理7.2通常用来证明f的Lebesgue可积性。

定理7.3（Fatou） 设$f_n \in L(I)$为非负可积函数列。若$\underline{\lim}\int_I f_n$有限，则$\underline{\lim} f_n \in L(I)$。并且

$$\int_I \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim}\int_I f_n$$

证明 设$H_{k,n}(x) = \min(f_n(x), \cdots,$

$$f_k(x))_{n(k=n,n+1,\cdots)}$$

则由Lebesgue控制收敛定理证明过程知道，$\{H_{k,n}(x)\}_{k=1,2,\cdots}$是$L(I)$内的非负减少序列，它收敛到$H_n(x) \in L(I)$，并且有

$$\int_I H_n(x) = \lim_{K\to\infty}\int_I H_{k,n}(x)$$

又由于

$$\int_I H_{k,n}(x) \leqslant \min\left(\int_I f_n, \int_I f_{n+1}, \cdots, \int_I f_k\right) \quad (k \geqslant n)$$

故

$$\int_I H_n = \lim_{K\to\infty}\int_I H_{k,n}(x) \leqslant \lim_{K\to\infty} \min\left(\int_I f_n,\right.$$

$$\int_I f_{n+1}, \cdots, \int_I f_k) = \inf_{K>n}\int_I f_k < K$$

（因为$\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{n\to\infty}\int_I f_k$存在）

因之，$\{\int_I H_n(x)\}$为囿于上的增加数列。由Levi定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I H_n(x) = \int_I \lim_{n\to\infty} H_n(x) = \int_I \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{K\to n}\int_I f_k = \varliminf_{n\to\infty}\int_I f_n$$

Fatou定理中，严格不等式成立是可能的。

例　设$I=[0, 1]$，在I上定义非负可积函数列：

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n}<x\leqslant 1 \end{cases}$$

则有

$$\int_{[0,1]} \varliminf f_n = 0 < \varliminf \int_{[0,1]} f_n = 1$$

§8　可测函数与可测集

$L(I)$内的每一个函数$f(x)$，都是某个简单函数列的几乎处处极限。然而相反的结论不真。例如，$f\equiv 1$是$(-\infty, +\infty)$上的简单函数列的极限，但$f\notin L(-\infty, +\infty)$。因之，区间$I$上的简单函数列的极限所成的函数类是严格包含$L(I)$的。我们把这个比$L(I)$更广的函数类称为$I$上的**可测函数类**。

定义8.1 定义在I上的函数f称为在I上是可测的，如果在I上存在着简单函数列$\{S_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \qquad (p\cdot p\cdot)$$

记I上可测函数的全体为$M(I)$。从定义立即可以看出，如果$f\in L(I)$，必$f\in M(I)$。并且，如果f在I上可测，则f在I的每一个子区间上也可测。

我们即将看到，在一定条件下，可测函数也是L－可积的。

定理8.1 若$f\in M(I)$，并且对$L(I)$内的某个非负可积函数g，成立

$$|f(x)|\leqslant g(x) \qquad (p.p.)$$

则$f\in L(I)$。

证明 设简单函数列$\{S_n\}$在I上几乎处处收敛于$f(x)$。由定理7.2，立知$f\in L(I)$。

推论1 若$f\in M(I)$，且$|f|\in L(I)$，则$f\in L(I)$。

推论2 若f是有界区间I上的有界可测函数，则$f\in L(I)$。

证明 令$g(x)=\sup_{x\in I}\{|f(x)|\}=M$，便有$|f|\leqslant g$，而$g\in L(I)$。

定理8.2 设φ为R^2上连续的实函数，若$f\in M(I)$且$g\in M(I)$，则

$$h(x)=\varphi[f(x),g(x)]\in M(I)$$

特别，$f\pm g$，$f\cdot g$，$|f|$，$\max(f,g)$和$\min(f,g)$均在I上可测。若$f(x)\neq 0$ $(p.p.)$，则$1/f$也在I上可测。本定理的证明，由读者自己完成。

定理8.3 设$\{f_n\}$是I上的可测函数列，并且$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $(p.p.)$，则$f \in M(I)$。

证明 在$L(I)$内，任取一个正函数$h(x)$（例如$h(x)=\frac{1}{1+x^2}$），构造

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)}{1+|f_n(x)|}\cdot h(x) \quad (n=1,2\cdots)$$

由于$\{f_n(x)\}$几乎处处收敛，故推得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\cdot h(x),\ (p\cdot p\cdot)\ (*)$$

由定理8.2，有$g_n \in M(I)$又$|g_n(x)| \leqslant h(x)$。故由定理8.1，有$g_n \in L(I)$。此外，对每一个x，亦有

$\left|\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\cdot h(x)\right| \leqslant h(x)$。所以由定理7.2，得

$$G(x)=\frac{f(x)h(x)}{1+|f(x)|}\in L(I)$$

从而$G \in M(I)$。

最后，从$(*)$可以解出$f(x)=\frac{G(x)}{h(x)-|G(x)|}$，其中$h(x)-|G(x)|\neq 0$。因而由定理8.2，$f \in M(I)$。

定理8.3说明，类$M(I)$的元素，对于几乎处处收敛的极限运算来说是封闭的。因此，我们不能期望通过可测函数列的几乎处处收敛极限来定义更广的函数类。但是这并不等于说不存在不可测的函数。实际上，不可测的函数是存在的。

定义8.2 设S为$\mathbf{R}$的任意一个非空子集。称函数

$$\chi_s(x)=\begin{cases}1, & 若x\in S\\ 0, & 若x\in \mathbf{R}\setminus S\end{cases}$$

为S的特征函数。

定理8.4 若S为R的零测度集，则$\chi_s \in L(R)$且$\int_R \chi_s = 0$；反之，若$\chi_s \in L(R)$，且$\int_R \chi_s = 0$，则S为零测度集。

证明 若S为零测度集。则χ_s在R上几乎处处为零，令$S_n(x) \equiv 0_{(n=1,2,\cdots)}$，$\{S_n(x)\}$便是R上几乎处处收敛到零的增加函数列，即有

$$\lim_{n\to} S_n(x) = \chi_s(x) \qquad (p.\ p.\ )$$

因而$\{S_n(x)\}$生成$\chi_s(x)$。所以χ_s是C_1类函数，从而也是$L(R)$的元素，并且按定义，有

$$\int_R \chi_s = \lim_{n\to\infty}\int_R S_n(x) = 0$$

反之，对$n=1,2,\cdots$，令$f_n = \chi_s$，显然f_n非负，并且有

$$|f_n| = \chi_s \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\int_R |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\int_R \chi_s = 0$$

故由定理6.3，知级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$除了至多一个零测度集$T$外处处收敛。但对$x \in S$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$是不可能收敛的，因为此时每一项都等于1；若$x \notin S$，则级数收敛，因为此时每一项都为零，因之$T=S$，即$S$为零测度集。

定义8.3 R的一个子集S称为可测的，如果它的特征函数χ_s是可测的；此外，若χ_s在R上为L可积，定义S的测

度$\mu(S)$为

$$\mu(S)=\int_R \chi_S$$

当χ_S可测而不L可积时，定义$\mu(S)=+\infty$。

按上述定义的集上的函数μ，称为Lebesgue测度。

例1 零测度集S是可测的，并且$\mu(S)=0$（定理8.4）。

例2 每一个区间I（有界或无界）是可测的。若I是以a，b（$b\geqslant a$）为端点的有界区间，则$\mu(I)=b-a$；若I是无界区间，则$\mu(I)=+\infty$。

例3 若A、B为可测，且$A\subseteq B$，则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

定理8.5

1°） 若S和T可测，则$S\setminus T$可测；

2°） 若S_1，S_2，…可测，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$和$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_i$可测。

证明

1°）由于$\chi_{S\setminus T}=\chi_S-\chi_S\chi_T$，便知在$S$、$T$可测的情况下，$S\setminus T$也可测。

2°） 由于$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i}=\max(\chi_{S_1},\chi_{S_2},\cdots\chi_{S_n})$，

$\chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}S_i}=\min(\chi_{S_1}\chi,_{S_2},\cdots\chi_{S_n})$，故对每一个$n$，

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$与$\bigcap\limits_{i=1}^{n}S_i$均可测。因之由定理8.3，函数

$$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i}=\lim_{n\to\infty}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i}\quad 与\chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}S_i}=\lim_{n\to\infty}\chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}S_i}$$

均可测。所以$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$与$\bigcap_{i=1}^{\infty}S_i$可测。

定理8.6 设A、B为两不相交可测集，则

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B) \qquad (1)$$

证明 因为A、B可测，故χ_A、χ_B可测，并且由于$A\cap B=\varnothing$，故有

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$$

从而$\chi_{A\cup B}$可测。如果$\chi_{A\cup B}$可积，则由定理8.1，χ_A与χ_B亦可积，并有

$$\mu(A\cup B)=\int_R\chi_{A\cup B}=\int_R\chi_A+\int_R\chi_B$$
$$=\mu(A)+\mu(B)。$$

如果$\chi_{A\cup B}$不可积，则至少有一个χ_A或χ_B不可积。这时等式(1)也成立，只是两边均为$+\infty$。

定理8.6当然还可以推广到n个不相交可测集的情况，这个性质称为“测度的有限可加性”。但下面的这个定理告诉我们，Lebesgue测度还具有可数可加性。

定理8.7 若$\{A_1, A_2, \cdots\}$为可数个不相交的可测集，则有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \qquad (2)$$

证明 令

$$S_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\ \chi_n=\chi_{S_n},\ S=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

首先，由定理8.5，S为可测。其次，由测度的有限可加性，对每一个n，有

$$\mu(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

我们欲证$\mu(S_n)\longrightarrow\mu(S)$。

若$\mu(S)$为有限。则χ_S可积。因而每一个χ_n可积（定理8.1）。又单调递增序列$\{\mu(S_n)\}$以$\mu(S)$为上界，故由Lebesgue控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(S_n)=\lim_{n\to\infty}\int_R\chi_n=\int_R\lim_{n\to\infty}\chi_n$$

$$=\int_R\chi_S=\mu(S)$$

若$\mu(S)=+\infty$，则χ_S不可积。由定理6.2，或自某个χ_n之后不可积；或者每一个χ_n都可积，但$\int_I\chi_n=\mu(S_n)$趋向无穷大。但不论出现哪一种情况，(2)均成立，此时两边都为$+\infty$。

例　设G为R的开子集，它的构成区间为$(\alpha_i,\ \beta_i)$，则G可测，并且有

$$\mu(G)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\alpha_i,\ \beta_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)$$

§9　平方可积函数类$L^2(I)$

定义9.1　I上满足$f^2\in L(I)$的实值可测函数f之全体，称为类$L^2(I)$，属于$L^2(I)$的函数称为在I上是平方可积的。

显然，$L^2(I)$与$L(I)$之间不存在包含关系。

例如

$$f(x)=\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, & 0<x\leqslant 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

它属于$L[0, 1]$，但不属于$L^2[0, 1]$；函数$g(x) = \frac{1}{x}$ $(x\geqslant 1)$，则属于$L^2[1, +\infty)$而不属于$L[1, +\infty)$。但是有

定理9.1 若$f\in L(I)$，并且f在I上几乎处处有界，则$f\in L^2(I)$。

证明：因为$f\in L(I)$，故f可测，因之f^2可测，并且有

$$|f^2|\leqslant M|f(x)| \qquad (p\cdot p\cdot)$$

这里的M代表$|f|$的一个上界。由定理8.1，知$f^2\in L(I)$。

定理9.2 若$f\in L^2(I)$，$g\in L^2(I)$则$f\cdot g\in L(I)$；并且对f，g的每一个线性组合$af+bg$也属于$L^2(I)$（a，b为任意实数）。

证明 $f\cdot g\in M(I)$是显然的。而

$$|f\cdot g|\leqslant \frac{f^2+g^2}{2}$$

所以由定理8.1，$f\cdot g\in L(I)$。

同样，$(af+bg)\in M(I)$，并且由

$$(af+bg)^2=a^2f^2+2abfg+b^2g^2$$

立知$(af+bg)\in L^2(I)$。

定理9.2告诉我们，对$L^2(I)$内的每一对元素f与g，我们总可以与数

$$\int_I fg\,dx$$

相对应。记$\int_I fgdx=(f,g)$，并称它为f与g的内积，而称非负数

$$\|f\|=(f,f)^{1/2}$$

为f的L^2范数。

内积和范数这两个概念，在Fourier级数中起着很重要的作用。前者推广了两个n维向量点积的概念，后者推广了向量长度的概念。它们有如下的基本性质。

定理9.3 设f，g，h为L^2内的任意三个元素，α为实数，则有

i) $(f,g)=(g,f)$

ii) $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$，

iii) $(\alpha f,g)=\alpha(f,g)$，

iv) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$

v) $|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$，(CauChy不等式)

vi) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$（三角不等式）

证明 性质i）—iv）都可从定义出发直接推证，而性质v）可由不等式

$$\int_I\left[\int_I|f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2dy\right]dx\geqslant 0$$

推出。从而由

$$\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=\|f\|^2+\|g\|^2+2(f,g)\leqslant\leqslant(\|f\|+\|g\|)^2$$

可以证明性质vi）。

定理9.4 设$\{g_n\}$为$L^2(I)$的元素序列，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|<+\infty$$

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在$I$上几乎处处收敛到某个极限函数$g\in L^2(I)$，并且有

$$\|g\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\| \qquad (1)$$

证明 事实上，为了证明$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$为几乎处处收敛，我们只要去证明$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$是几乎处处收敛的，为此我们证明序列$f_n=\left(\sum_{k=1}^{n}|g_k(x)|\right)^2$是几乎处处收敛的。显然序列$\{f_n(x)\}$是$L(I)$内的非负函数增加序列，并且若令$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|=M$，则有

$$\int_I f_n=\int_I\left(\sum_{k=1}^{n}|g_k|\right)^2=\left\|\sum_{k=1}^{n}|g_k|\right\|^2\leqslant$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\|g_k\|\right]^2\leqslant M^2$$

所以序列$\left\{\int_I f_n\right\}$收敛。由Levi定理，存在$f\in L(I)$，使

$$f_n\longrightarrow f \quad (p.p.)$$

这就证明了$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$在$I$上几乎处处绝对收敛。在其收敛点上，令

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g_k(x) \qquad (p\cdot p\cdot)$$

我们证明$g\in L^2(I)$。为此，令

$$G_n(x)=\left|\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\right|^2$$

则有$G_n(x)\longrightarrow|g|^2$ $(p.p.)$。对每一个n，$G_n\in L(I)$并且有

$$G_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant f(x) \qquad (p.p.)$$

所以由Lebesgue控制收敛定理，$g^2\in L(I)$。因g可测，故$g\in L^2(I)$。

最后，由于$\int_I|g|^2=\lim_{n\to\infty}\int_I G_n(x)$，而

$$\int_I G_n(x)=\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k\right\|^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|g_k\|\right)^2\leqslant M^2$$

所以有$\|g\|^2\leqslant M^2$，此即（1）。

定理9.5 （Riesy—Fischer）—设$\{f_n\}$为$L^2(I)$内的一个Cauchy序列，则存在$f\in L^2(I)$使

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

证明：按定义，任给$\varepsilon>0$，存在正整数N。当$m\geqslant n\geqslant N$时，有$\|f_m-f_n\|<\varepsilon$。因之，取$\varepsilon=\frac{1}{2^k}(k=1,2\cdots)$，便可求得一列正整数

$$n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots$$

当$m\geqslant n_k$时，有

$$f_m-f_{n_k}\|<\frac{1}{}$$

令$g_1=f_{n_1}$，并置$g_k=f_{n_k}-f_{n_{k-1}}$ $(k\geqslant 2)$，则级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\|g_k\|$收敛，因而由定理9.4，级数$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$在$I$

上几乎处处收敛到某个$f\in L^2(I)$。下面证明$\|f_m-f\|\to 0$ $(m\to\infty)$。为此，应用三角不等式

$$\|f_m-f\|\leqslant\|f_m-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-f\| \quad (m\geqslant n_k) \qquad (2)$$

上式右边第一项小于½，为估计第二项，考察

$$f-f_{n_k}=\sum_{r=k+1}^{\infty}(f_{n_r}-f_{n_{r-1}})$$

而$\sum_{r=k+1}^{\infty}\|f_{n_r}-f_{n_{r-1}}\|$收敛，因之可利用定理9.4之不等式（1），有

$$\|f-f_{n_k}\|\leqslant\sum_{r=k+1}^{\infty}\|f_{n_r}-f_{n_{r-1}}\|$$

$$<\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

于是，当$m\geqslant n_k$时，有

$$\|f_m-f\|\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{3}{2^k}$$

当$k\to\infty$时，$n_k\to\infty$。这就表明$m\to\infty$时，有$\|f_m-f\|\to 0$。证毕。

定理9.5说明，空间$L^2(I)$是完备的。从证明的过程中还进一步可以看出，对于$L^2(I)$内的每一个Cauchy序

列，都存在子序列在I上几乎处处点态收敛到$L^2(I)$内的某一个元素f。但这并不等于说$\{f_n\}$可以几乎处处点态收敛到f。所以$\{f_n\}$在$L^2(I)$内依范数收敛到f与$\{f_n\}$点态收敛到f并不是一回事。

习　　题

1．设f、g、h均为定义在实数子集A上的实函数，证明

a)　$\max(f, g)+\min(f, g)=f+g$，

b)　$\max(f+h, g+h)=\max(f, g)+h$，

c)　$\min(f+h, g+h)=\min(f, g)+h$。

2．设$\{f_n\}$和$\{g_n\}$为区间I上的函数增加序列，令

$$u_n=\max(f_n, g_n) \text{ 及 } v_n=\min(f_n, g_n)$$

a)　证明$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是I上的增加序列。

b)　若在I上$\{f_n\}$几乎处处收敛于f，$\{g_n\}$几乎处处收敛于g，证明在I上$\{u_n\}$几乎处处收敛于$\max(f, g)$，$\{v_n\}$几乎处处收敛于$\min(f, g)$。

3．设阶梯函数的增加序列$\{S_n\}$在I上点态收敛于f，并设I为无界，其上几乎处处有$f(x)\geqslant 1$。证明序列$\{\int_I S_n\}$发散。

4．设$f_n=e^{-nx}-2e^{-2nx}$。证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

5．证明下列各个等式之正确性：

a) $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx=1$；

b) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x}\ln(\frac{1}{x})dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}$ $(p>0)$

6．设f为开区间I的一个Lebesgue可积函数，并设f'在I上几乎处处存在。证明f'在I上可测。

7． a) 设$\{S_n\}$为阶梯函数列。并在R上处处有$S_n\to f$。证明对任何实数a，有

$$f^{-1}((a,+\infty))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}S_k^{-1}((a+\frac{1}{n},+\infty))$$

b) 若f在R上可测，证明对R的每一个开子集A，集$f^{-1}(A)$可测。

8．设$\{f_n\}$与f均为$L^2(I)$内的函数，并且$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$。证明$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\|f\|$（即范数的连续性）。

9．若$\{f_n\}\in L^2(I)$，$f\in L^2$，$\|f_n-f\|\to 0$；$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ $(p.p.)$。证明

$$f(x)=g(x) \quad (p.p.)$$

10．设$f_n\in L^2(I)$，$f\in L^2(I)$。证明对每一个$g\in L^2(I)$，有$\lim_{n\to\infty}\int_I gf_n=\int_I gf$。

11. 若 $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$，$\lim_{n\to\infty}\|g_n-g\|=0$，

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n\cdot g_n=\int_I f\cdot g_\circ$$